

## III. Электричество и магнетизм

### 3.1. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Потенциал

В природе существуют силы взаимодействия между материальными телами, значительно превышающие силу гравитационного притяжения, — электрические силы. Эти силы возникают между частицами либо макроскопическими телами, обладающими электрическим зарядом, и приводят как к притяжению тел, так и к отталкиванию на расстоянии. Существуют заряды двух типов, условно называемые положительными и отрицательными. Заряды одного знака отталкивают друг друга, заряды разных знаков создают силу притяжения. Таким образом, электрическое взаимодействие проявляется посредством поля сил, создаваемого зарядами в пространстве.

Носителями заряда являются элементарные частицы. Характерным размером элементарных частиц можно считать размер атома — порядка  $10^{-10}$  м. Из известных в настоящее время элементарных частиц стабильными частицами являются электрон, протон и нейтрон. Нейтрон не обладает зарядом, а электрон и протон обладают элементарными зарядами противоположного знака. Принято считать заряд электрона отрицательным. В системе СИ заряд имеет собственную физическую размерность. Величина заряда измеряется в кулонах (Кл). Величина элементарного заряда равна  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Существование заряда является таким же характерным свойством электрона, как и наличие у него массы покоя.

Названные элементарные частицы образуют электрически нейтральные атомы и молекулы, из которых состоят макроскопические тела. Избыток или недостаток электронов в веществе приводит к тому, что оно оказывается электрически заряженным. Таким образом, макроскопический заряд тела является величиной, кратной элементарному заряду.

Другими словами, заряд от одного тела другому может переда-

ваться только дискретными порциями, равными суммарному заряду переданных электронов.

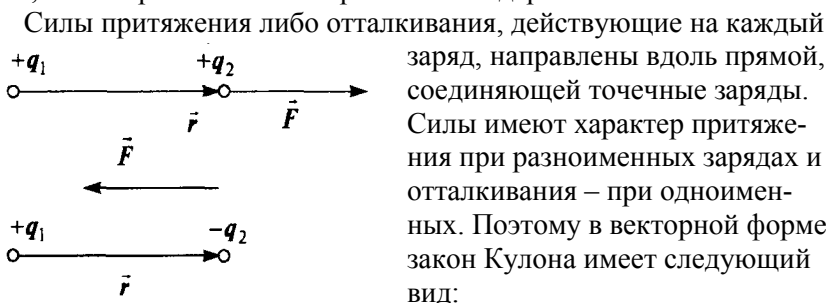
Материальная точка, обладающая электрическим зарядом, называется точечным зарядом. В природе точечных зарядов не бывает. Точечный заряд представляет собой удобную модель для рассмотрения электрических взаимодействий между заряженными телами на расстояниях, больших по сравнению с размерами тел. В теории электричества представление о точечном заряде играет такую же роль, как материальная точка — в механике.

Точечные заряды  $q_1$  и  $q_2$  взаимодействуют с силой, определяемой законом Кулона, который был установлен опытным путем в 1785 году,

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (3.1),$$

где  $k$  — размерная константа, величина которой в СИ имеет порядок  $10^{10}$ ;  $q_1$  и  $q_2$  — взаимодействующие заряды, величина которых измеряется в кулонах;  $r$  — расстояние между зарядами. Закон Кулона похож по виду на закон всемирного тяготения Ньютона, но большая величина коэффициента пропорциональности  $k$  обуславливает значительное превышение электрических сил над гравитационными силами.

Закон Кулона, как и закон всемирного тяготения, относится к фундаментальным физическим законам. Он хорошо описывает электрические взаимодействия на больших и малых расстояниях и, как показывает опыт, справедлив вплоть до расстояний  $10^{-14}$ — $10^{-15}$  м, на которых начинают проявляться ядерные силы.



Силы притяжения либо отталкивания, действующие на каждый заряд, направлены вдоль прямой, соединяющей точечные заряды. Силы имеют характер притяжения при разноименных зарядах и отталкивания — при одноименных. Поэтому в векторной форме закон Кулона имеет следующий вид:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r, \quad (3.2)$$

где  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  – единичный вектор в направлении радиуса-вектора,

проведенного от одного заряда к другому. На рис. изображена сила  $F$ , действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ . Радиус-вектор  $r$  проведен от заряда  $q_1$ , к заряду  $q_2$ , что связано с выбором начала координат. Если знаки зарядов  $q_1$  и  $q_2$  одинаковы, сила  $F$  направлена вдоль радиуса-вектора  $r$ ; если знаки зарядов  $q_1$  и  $q_2$  противоположны – сила  $F$  направлена против  $r$ . Для того, чтобы получить силу, действующую на первый заряд (она равна величине  $F$  по модулю), нужно радиус-вектор  $r$  провести от второго заряда к первому.

Выражение (3.2) представляет собой произведение одного из зарядов на вектор напряженности электрического поля, создаваемого другим зарядом. Таким образом, из закона Кулона следует, что точечный электрический заряд создает в пространстве электрическое поле, напряженность которого определяется формулой:

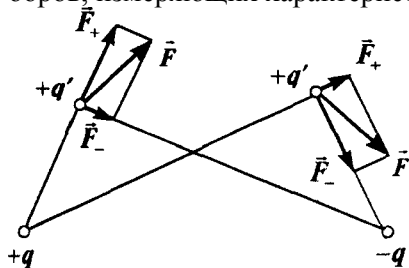
$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \quad (3.3)$$

Подставим выражение (3.3) в формулу (3.2). Тогда для силы, действующей на заряд  $q$  в электрическом поле, напряженность которого  $E$ , получим

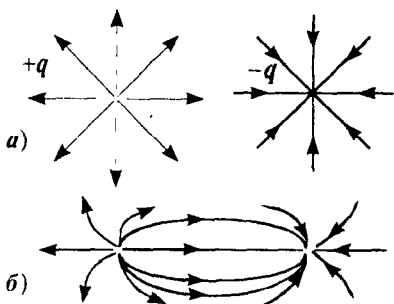
$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (3.4)$$

Эта формула получена для точечного заряда, но имеет более общий характер. Из сравнения формул (3.2) и (3.3) видно, что напряженность электрического поля совпадает по направлению с вектором силы и численно равна силе, действующей со стороны поля на единичный положительный электрический заряд, находящийся на расстоянии  $r$  от источника поля. Однако следует иметь в виду, что размерность напряженности поля отличается от размерности силы. Если в электрическое поле, создаваемое каким-либо зарядом, поместить другой (так называемый пробный) заряд, то на него будет действовать сила, сообщая ему ускорение и вызывая

его смещение. Этот принцип положен в основу действия всех приборов, измеряющих характеристики электрического поля.



Если пробный заряд поместить в точку, в которой существуют электрические поля от нескольких источников, то на него будет действовать суммарная сила, равная векторной сумме сил каждого поля. В этом случае направление силы, действующей на пробный заряд, будет меняться от точки к точке (рис.). Линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением силы в этой точке, называют силовыми линиями.



Поскольку векторы напряженности поля совпадают с направлениями сил, действующих на пробный заряд, они также представляют собой сумму напряженностей отдельных полей и направлены вдоль силовых линий поля. В этом заключается принцип суперпозиции полей. Линии напряженности полей

точечных зарядов — прямые и направлены по радиусам, причем принято при положительных зарядах считать их идущими от заряда, а при отрицательных — в направлении заряда (рис.). В этом случае говорят, что силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Силовые линии системы зарядов — сложные кривые. Это видно уже на примере системы из двух зарядов (рис.). Напряженность поля — векторная величина, характеризующая поле в разных точках пространства.

Поле можно характеризовать и некоторой скалярной величиной, а именно потенциалом поля, который также имеет разное значение в разных точках пространства. Мы уже имели дело с потенциалом при изучении гравитационного поля и видели, что произ-

ведение массы тела на потенциал гравитационного поля определяет потенциальную энергию тела в этом поле. В частности, в поле сил тяжести потенциальная энергия тела с массой равна  $U = mgh$ .

Здесь величина  $gh$  есть значение потенциала поля сил тяжести на высоте  $h$  вблизи поверхности Земли. В общем случае произвольного физического поля мы ввели потенциальную энергию частицы по формуле:

$$U = C\varphi(r), \quad (3.5)$$

где  $C$  — некоторая константа, характеризующая свойства тела или частицы, взаимодействующей с полем;  $\varphi(r)$  — потенциал поля. Ясно, что потенциальную энергию заряда в электрическом поле следует записать в виде:

$$U = q\varphi(r), \quad (3.6)$$

где теперь под  $\varphi(r)$  следует понимать потенциал электрического поля в данной точке.

Получим выражение для потенциала электрического поля точечного заряда. Пусть пробный заряд находится в электрическом поле заряда и на него действует сила Кулона (3.2) (рис.). Вычислим работу этой силы при перемещении заряда из положения 1 в положение 2. Эта работа

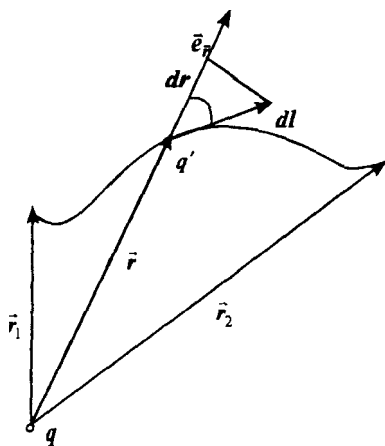
$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{\ell} = kqq' \int_1^2 \vec{e}_r d\ell / r^2,$$

где  $d\ell$  — бесконечно малое перемещение вдоль траектории заряда  $q'$ .

Как видно из рис.,  $\vec{e}_r d\ell = dr$ ,

где  $dr$  — приращение модуля вдоль переменного радиус-вектора  $r$ . Поэтому

$$A = kqq' \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = kqq' \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.7)$$



С другой стороны, как известно из механики, работа в поле внешней силы может быть представлена как разность потенциальных энергий частицы в положениях 1 и 2:

$$A = U(1) - U(2). \quad (3.8)$$

Сравнивая между собой выражения (3.7) и (3.8), получаем, что потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов имеет вид:

$$U(\vec{r}) = k \frac{qq'}{r} \quad (3.9)$$

Из соотношений (3.9) и (3.6) следует, что потенциал электрического поля, создаваемого точечным зарядом, описывается формулой

$$\varphi(\vec{r}) = k \frac{q}{r} \quad (3.10)$$

Потенциал электрического поля, также как и напряженность поля, убывает с расстоянием, обращаясь на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) в нуль. Нетрудно видеть, что потенциал электрического поля, созданного системой зарядов, равен арифметической сумме потенциалов полей отдельных зарядов. Выражение (3.7) для работы поля над зарядом можно записать

$$A = q(\varphi(r_1) - \varphi(r_2)). \quad (3.11)$$

Это выражение относится уже не только к полю точечного заряда, но имеет вполне общий характер, — оно применимо для вычисления механической работы, производимой над зарядом произвольным электрическим полем. Величина  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , определяющая эту работу, называется электрической разностью потенциалов. Можно говорить, что электрическая разность потенциалов вызывает перемещение заряда.

Пусть под действием электрической разности потенциалов заряд переместился из точки  $r$  на бесконечность. При этом нужно положить  $r = \infty$  и из формулы (3.10) следует, что  $\varphi_2 = 0$ . Работа поля по перемещению заряда из точки  $r$  на бесконечность согласно (3.11)

$$A = q\varphi(r). \quad (3.12)$$

Из выражения (3.12) следует, что электрический потенциал в

данной точке численно равен работе, которую производит поле для удаления единицы заряда из этой точки на бесконечность. Единицей потенциала в СИ является один вольт — потенциал в такой точке, для перемещения из которой на бесконечность заряда величиной в один кулон необходимо совершить работу, равную одному джоулю.

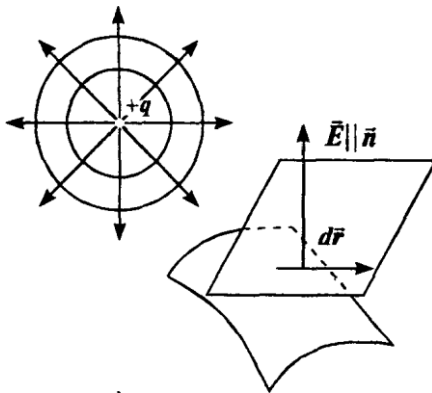
Выясним, как связаны между собой потенциал и напряженность электрического поля. Из механики известно, что сила, действующая на частицу, связана с потенциальной энергией частицы во внешнем поле следующим соотношением:

$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}. \quad (3.13)$$

где производная означает, как и раньше, операцию градиента — дифференцирование в направлении изменения вектора  $r$ . Подставляя в (3.12) вместо  $F$  (3.4) и вместо  $U$  (3.6), находим

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (3.14)$$

Полученная связь между вектором напряженности и потенциалом электрического поля допускает простую геометрическую интерпретацию. Нарисуем так называемые эквипотенциальные поверхности — поверхности, во всех точках которых потенциал поля имеет одинаковую величину. Например, для поля точечного заряда эквипотенциальными поверхностями являются сферы (рис.). Поскольку, по определению, потенциал эквипотенциальной поверхности сохраняет постоянное значение, при бесконечно малом перемещении по этой поверхности в окрестности точки  $r \cdot d\varphi = 0$ . Таким образом, работа при перемещении заряда по поверхности равного потенциала равна нулю  $dA = q \cdot d\varphi = 0$ . Эта же работа может быть записана в виде

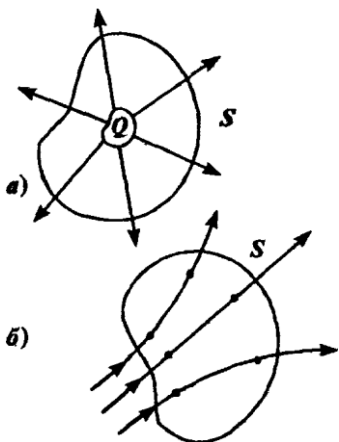


$dA = qEdr = 0$ , где  $dr$  — перемещение в касательной плоскости в окрестности точки  $r$ . Отсюда следует, что все проекции вектора  $E$  на касательную плоскость в этой точке равны нулю, то есть вектор  $E$  направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности. Поскольку вектор  $E$  сам направлен по касательной к соответствующей силовой линии электрического поля, можно заключить, что силовые линии поля пронизывают эквипотенциальные поверхности в каждой точке перпендикулярно соответствующим касательным плоскостям. Таким образом, силовые линии электрического поля в каждой точке эквипотенциальной поверхности параллельны направлению нормали к поверхности.

## **3.2. Теорема Гаусса. Вычисление полей. Энергия электрического поля**

### **3.2.1. Теорема Гаусса**

Заряженные макроскопические тела содержат большое количество элементарных зарядов, распределенных на их поверхности либо в объеме. Для того, чтобы рассчитать электрические поля, создаваемые в пространстве заряженными телами, нужно просуммировать напряженности всех полей, создаваемых отдельными точечными зарядами. Это очень сложная, а часто и невыполнимая



задача. Поэтому, вместо того, чтобы суммировать напряженности отдельных зарядов, можно просуммировать все векторы напряженности результирующего поля, входящие и выходящие из объема, занятого зарядами. Поскольку векторы напряженности являются касательными к силовым линиям поля, для этого нужно просто сосчитать число входящих и выходящих силовых линий.

Возьмем некоторый объем, занятый зарядами, суммарное число ко-



торых  $Q$ , и заключим его внутри воображаемой замкнутой поверхности  $S$  (рис.). Если заряд равен нулю, поле отсутствует. Если заряд находится вне поверхности, силовые линии пронизывают поверхность. Однако полное число силовых линий, проходящих сквозь поверхность, равно нулю (число входящих линий равно числу выходящих). При наличии же внутри поверхности отличного от нуля заряда суммарное число силовых линий будет отлично от нуля. Очевидно, их число должно быть пропорционально величине заряда  $Q$ . Именно в этом состоит содержание теоремы Гаусса, связывающей число силовых линий, проходящих через поверхность, охватывающую систему зарядов, с числом этих зарядов.

Для того чтобы придать теореме Гаусса формальное выражение, определим понятие потока вектора через поверхность.

Выделим на поверхности  $S$  бесконечно малый элемент площади  $dS$  и обозначим единичный вектор нормали к касательной плоскости  $n$  (рис.). Потоком вектора  $E$  через элемент поверхности  $dS$  будем называть скалярную величину

$$d\Phi = E \cdot dS \cdot \cos\alpha = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.15)$$

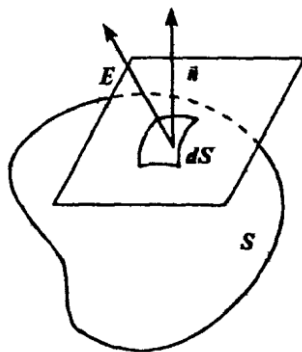
Удобно ввести формальное обозначение векторного элемента площади  $d\vec{S} = \vec{n}dS$ , тогда формула (3.15) запишется в виде:

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} \quad (3.16)$$

Величину полного потока вектора через поверхность можно получить, просуммировав выражение (3.16) по всем элементам поверхности

$$\Phi = \int_S \vec{E}d\vec{S}. \quad (3.17)$$

Вычислим, например, поток вектора через поверхность сферы, окружающей точечный заряд. В этом случае величина потока



$$\Phi = kq \oint (\vec{e}_r \vec{n}_r) \frac{dS}{R^2} = k \frac{q}{R^2} \oint_S (\vec{e}_r \vec{n}_r) dS, \quad (3.18)$$

где  $R$  — радиус сферы, охватывающей заряд.

В случае точечного заряда направление радиуса-вектора  $r$  совпадает с направлением нормали к поверхности сферы в точке поверхности. Поэтому  $(\vec{e}_r \vec{n}_r) = 1$ . Отсюда:

$$\Phi = k \frac{q}{R^2} \int dS = k \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kq. \quad (3.19)$$

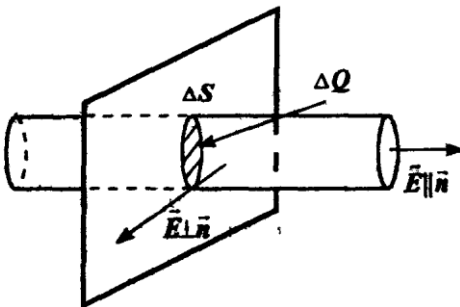
Для постоянной  $k$  принято пользоваться обозначением

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  смысл которого выяснится позже. Используя это обо-

значие, получим для потока вектора напряженности через поверхность сферы, окружающей точечный заряд,

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (3.20)$$

Это и есть теорема Гаусса в интегральной форме. Она справедлива для произвольной системы электрических зарядов, и в этом случае утверждает, что поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность, внутри которой находится система зарядов, равен суммарному заряду, деленному на константу  $\epsilon_0$ .



Теорема Гаусса позволяет довольно просто находить напряженности полей макроскопических тел. Определим, например, напряженность поля бесконечно однородно заряженной плоскости (рис.). Рассмотрим для определенности положительно заряженную

бесконечную плоскость. Из соображений симметрий следует, что результирующее электрическое поле такой плоскости также одно-

родно, а линии напряженности будут перпендикулярны плоскости и направлены вовне. Выберем на плоскости элемент площади  $\Delta S$ , содержащий электрический заряд  $\Delta Q$ . Поверхностью, содержащей внутри себя заряд  $\Delta Q$  выберем цилиндр сечением  $\Delta S$ . Вектор  $E$  параллелен оси цилиндра и перпендикулярен его основаниям. Поток вектора  $E$  будет равен:

$$\int \vec{E} \vec{n} dS = \int_{\text{по бок.}} \vec{E} \vec{n} dS + 2 \int_{\text{по основ.}} \vec{E} \vec{n} dS. \quad (3.21)$$

Поскольку нормаль к боковой поверхности цилиндра и вектор  $E$  взаимно перпендикулярны, первый интеграл в правой части формулы тождественно равен нулю. Второй член равен

$$2 \int E dS = 2ES. \text{ Отсюда, согласно теореме Гаусса, } 2ES = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0}, \text{ и}$$

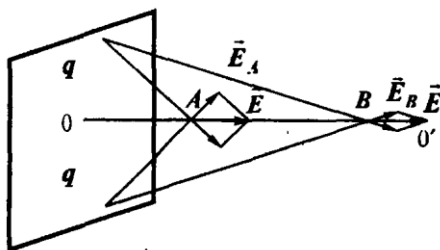
мы находим для напряженности поля заряженной плоскости

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (3.22)$$

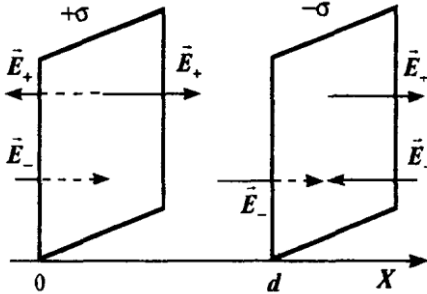
Величина  $\Delta Q/\Delta S = \sigma$  является поверхностной плотностью заряда. Окончательно:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3.23)$$

Обратим внимание на то, что поле бесконечной заряженной плоскости не убывает с расстоянием, хотя поле каждого отдельного заряда убывает по закону Кулона. Почему это происходит, видно из рис. Рассмотрим поле на оси  $OCU$ . Оно складывается в каждой точке векторным образом из напряженностей полей отдельных точечных зарядов. Для каждого заряда на плоскости найдется равный ему симметричный заряд, и в результате поле будет направлено по указанной оси. Далее из рис. видно, что, хотя поле  $E_A$  по величине превышает поле  $E_B$  (точка  $A$  находится на меньшем расстоянии от источника поля, чем точка  $B$ ), угол наклона вектора  $E_A$  к оси больше, чем угол наклона  $E_B$ , и поэтому ре-



зультирующее поле оказывается одинаковым, равным (3.23).



Важный случай представляет собой поле двух разноименно заряженных плоскостей (рис.). Поскольку поле каждой плоскости одинаково во всем пространстве, а результирующее поле представляет собой векторную сумму полей каждой плоскости  $E =$

$E_+ + E_-$ , видно, что в пространстве слева и справа от плоскостей  $E = 0$ , в то время как в объеме между плоскостями

$$E = E_+ + E_- = 2E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.24)$$

Система разноименно заряженных плоскостей представляет собой плоский конденсатор. Таким образом, в плоском конденсаторе электрическое поле сосредоточено в пространстве между его обкладками. Конденсатор является своеобразным накопителем электрического поля.

Рассмотрим, как изменяется потенциал поля плоского конденсатора. Так как электрическое поле плоского конденсатора однородно в вертикальной плоскости (см. рис.), то потенциал в пространстве между заряженными плоскостями изменяется только в направлении оси  $X$ . Соотношение (3.14) в этом случае приобретает вид

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}. \quad (3.25)$$

Найдем разность потенциалов внутри конденсатора, учитывая, что напряженность поля сохраняет постоянное значение (3.25),

$$\varphi(0) - \varphi(x) = \int_0^x E dx = Ex. \quad (3.26)$$

Таким образом, эквипотенциальные поверхности плоского конденсатора представляют собой плоскости, параллельные обклад-

кам. Полная разность потенциалов в конденсаторе с расстоянием между пластинами равным  $d$ ,

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \varphi(0) - \varphi(d) = Ed. \quad (3.27)$$

Пусть площадь однородно заряженной пластины  $S$ , а ее заряд  $Q$ . Тогда поверхностная плотность заряда  $\sigma = Q/S$ . Используя это соотношение и (3.24) получим связь между зарядом конденсатора и создаваемой им разностью потенциалов:

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{d}{\varepsilon_0 S} Q. \quad (3.28)$$

### 3.2.2. Электрическая емкость

Заряженные макроскопические тела создают в пространстве электрические поля. Но эти поля могут быть различными в зависимости от характера распределения зарядов в объеме или на поверхности тел. Другими словами, электрическое поле зависит от формы и природы заряженного тела: различные тела, будучи заряжены одинаково, создадут вокруг себя совершенно разные электрические поля. Способность макроскопического тела, будучи заряженным, создавать в пространстве электрическое поле, характеризуется электрической емкостью, определяемой как коэффициент пропорциональности между зарядом, сообщаемым телу, и потенциалом поля на его поверхности

$$Q = C \cdot U. \quad (3.29)$$

Здесь через  $U$  мы обозначили потенциал поля на поверхности тела  $\varphi(0)$ , считая потенциал поля на бесконечности равным нулю:

$$U = \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0).$$

Единицей емкости служит фарада — емкость такого тела, потенциал поля которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл. Для примера, вычислим электрическую емкость сферы радиусом  $R$ .

Потенциал на поверхности сферы можно найти исходя из общей формулы (3.14), учитывая, что поле обладает центральной симметрией:

$$\varphi(R) = \int_0^{\infty} E(r) dr . \quad (3.30)$$

Напряженность  $E(r)$  можно вычислить по теореме Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

откуда

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} . \quad (3.31)$$

Подставляя (3.31) в (3.30) и производя интегрирование, получаем:

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} . \quad (3.32)$$

Сравнивая (3.32) с (3.29), находим, что емкость сферы пропорциональна его радиусу

$$C = 4\pi\epsilon_0 R . \quad (3.33)$$

Учтя, что  $4\pi\epsilon_0$  имеет величину порядка  $10^{-10}$ , из формулы (3.33) видим, что емкостью в одну фараду обладает шар размером  $10^{10}$  м, то есть одна фарада — это очень большая величина. Емкости, обычно используемые в электрических схемах, во много раз меньше.

Емкостью тела называют отношение заряда, сообщаемого телу, к его потенциалу, возникающему при этом:

$$C = \frac{Q}{\varphi} , \text{ а для конденсатора } C = \frac{Q}{\varphi_+ - \varphi_-} \quad (3.34)$$

Из формулы (3.28) следует, что емкость плоского воздушного конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (3.35)$$

Обратим внимание на то, что формула (3.35) является приближенной — при ее выводе мы пользовались выражением для напряженности поля бесконечной плоскости. Этим выражением можно пользоваться, если расстояние  $d$  между пластинами мало по

сравнению с линейными размерами пластин. При этом условии можно не учитывать искажения поля вблизи краев пластин.

### 3.2.3. Энергия системы зарядов

Энергия системы зарядов представляет собой потенциальную энергию взаимодействия в электрическом поле, создаваемом остальными зарядами. Энергию отдельного заряда можно записать в виде:

$$W = q\varphi(r),$$

здесь  $\varphi(r)$  — потенциал поля в точке, где находится заряд.

Рассмотрим плоский конденсатор. Поскольку поле в любой точке пространства формируется всеми имеющимися зарядами, энергию их взаимодействия можно записать в любой из следующих форм:

$$W = Q_+\varphi_+ = Q_-\varphi_-$$

или в симметричной форме:

$$W = (Q_+\varphi_+ + Q_-\varphi_-)/2. \quad (3.36)$$

Учитывая равенство зарядов на пластинах конденсатора, получаем:

$$W = \frac{1}{2}Q(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{1}{2}QU. \quad (3.37)$$

Этой формуле можно придать и другой вид, используя определение емкости конденсатора:

$$W = \frac{1}{2}CU^2. \quad (3.38)$$

Формулу (3.38) можно также получить из следующих соображений. Электростатическая система представляет собой совокупность электрических зарядов, находящихся в созданном ими электрическом поле. Энергия покоящихся зарядов заключена в энергии их взаимодействия друг с другом посредством поля. Подчеркнем, что для создания этого поля не требуется совершения какой-либо дополнительной работы.

Вместе с тем, для создания самой электростатической системы зарядов требуется совершать вполне определенную работу против сил поля, создаваемого этой системой. Так, для того чтобы заря-

дить конденсатор, на его пластины нужно поместить заряд  $Q$  и тем самым создать в нем электрическое поле с разностью потенциалов  $U = Q/C$ . При разряде конденсатора, наоборот, именно эта разность потенциалов совершает работу над зарядом. Работа по перемещению бесконечно малого заряда  $dQ$  равна

$$dA = UdQ = \frac{Q}{C} dQ.$$

Полная работа, производимая над зарядом электрическим полем, запасенным в конденсаторе, равна

$$A = \frac{1}{C} \int_0^Q QdQ = \frac{Q^2}{2C}$$

и совпадает с (3.38).

Формулы (3.37), (3.38) выражают энергию взаимодействия зарядов через величину зарядов и емкости либо разности потенциалов на пластинах. Можно выразить величину этой энергии в терминах напряженности электрического поля, создаваемого в объеме конденсатора.

Воспользуемся формулами (3.27) и (3.35), подставив их в (3.38):

$$W = \frac{\epsilon_0 S d E^2}{2}.$$

Произведение  $Sd = V$  есть объем конденсатора, то есть:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 V. \quad (3.39)$$

Отсюда видно, что величина

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (3.40)$$

есть плотность энергии электрического поля в объеме конденсатора. Таким образом, энергия взаимодействия системы зарядов равна умноженной на объем плотности энергии создаваемого ими электрического поля.

Хотя формула (3.39) получена для плоского конденсатора, она имеет более широкий смысл. Энергия поля, сосредоточенного в произвольной области пространства, может быть найдена по фор-



муле

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV .$$

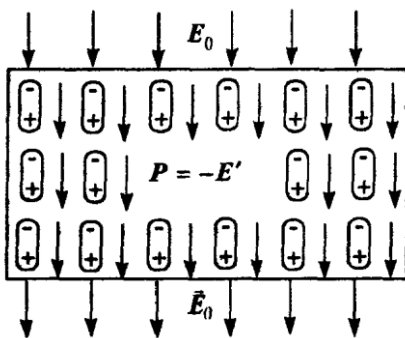
### 3.3. Электрическое поле в среде

С точки зрения электрических свойств все вещества можно грубо разделить на два класса — диэлектрики и проводники. Они отличаются друг от друга тем, что в диэлектриках не существует свободных зарядов, в то время как в проводниках заряды находятся в свободном состоянии и могут перемещаться по объему проводника. При отсутствии внешних полей и диэлектрики и проводники электрически нейтральны — противоположные заряды в них строго равны друг другу. Но эта компенсация заряда происходит по-разному в проводниках и диэлектриках, что и является причиной различного поведения этих сред во внешнем электрическом поле.

#### 3.3.1. Диэлектрики

Диэлектрики — это вещества, состоящие из нейтральных молекул. Типичный диэлектрик представляет собой твердое тело, как правило, состоящее из упорядоченно расположенных электрически нейтральных молекул вещества (рис.). Электрические заряды в молекулах являются связанными.

При помещении диэлектрика во внешнее электрическое поле,



это поле проникает в среду и вызывает в каждой молекуле смещение электрических зарядов относительно друг друга в противоположных направлениях. Это явление называется поляризацией диэлектрика. Система из двух связанных пространственно разделенных зарядов противоположного знака назы-

вается электрическим диполем. Произведение величины связанного заряда молекулы на вектор смещения заряда составляет электрический момент диполя:

$$\vec{p} = q\Delta\vec{r}. \quad (3.41)$$

Вектор  $\Delta r$  будем считать направленным от отрицательного заряда к положительному. Величина  $\Delta r$  имеет порядок размеров самой молекулы.

Величина смещения зарядов и соответственно электрический момент диполя пропорциональны электрическому полю  $E$ , действующему на молекулу:

$$\vec{p} = \alpha_0 \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (3.42)$$

где коэффициент  $\alpha_0$  — электрическая восприимчивость молекулы.

Множитель  $\varepsilon_0$  введен для того, чтобы электрическая восприимчивость оказалась безразмерной величиной.

Смещение заряда в молекуле на расстояние  $\Delta r$  приводит к изменению электрического потенциала, с которым взаимодействует заряд,

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{d\vec{r}} \Delta\vec{r} = -\vec{E}\Delta\vec{r}$$

и к некоторому изменению потенциальной энергии молекулы во внешнем электрическом поле

$$\Delta U = q\Delta\varphi = -q\vec{E}\Delta\vec{r}.$$

Используя (3.41), получаем:

$$\Delta U = -\vec{p}\vec{E} = -pE\cos\beta, \quad (3.43)$$

где  $\beta$  — угол между направлением внешнего поля и дипольного электрического момента.

Как известно из механики, состоянию устойчивого равновесия отвечает минимум потенциальной энергии частицы. Как видно из формулы (3.43), минимуму отвечает  $\beta = 0$ , то есть электрический момент диполя ориентируется по направлению поля  $E$ .

Суммарный дипольный момент всех молекул, входящих на единицу объема диэлектрика, образует вектор поляризации  $P$ :

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_i,$$

где  $V$  — объем диэлектрика.

Таким образом, во внешнем поле  $E_0$  все молекулы диэлектрика поляризуются, приобретают электрический момент и выстраиваются вдоль направления поля  $E_0$ . В результате в диэлектрике возникает поле  $E'$ , которое по величине пропорционально суммарному электрическому моменту  $P$ , но направлено противоположно внешнему полю  $E_0$ . Электрическое поле в диэлектрике складывается из внешнего поля  $E_0$  и внутреннего  $E'$ . Учитывая сказанное, запишем это выражение в скалярном виде:

$$E = E_0 - P/\epsilon_0 \quad (3.44)$$

где, согласно (3.42), поляризация диэлектрика  $P$  пропорциональна полю внутри среды,

$$P = \frac{N}{V} \alpha_0 \epsilon_0 E = \alpha \epsilon_0 E, \quad (3.45)$$

где  $\alpha = \frac{N}{V} \alpha_0$  — восприимчивость единицы объема диэлектрика. Подставив (3.45) в (3.44), найдем поле внутри диэлектрика:

$$E = \frac{E_0}{1 + \alpha}. \quad (3.46)$$

Величина

$$\epsilon = 1 + \alpha \quad (3.47)$$

называется диэлектрической проницаемостью среды. Обратим внимание на то, что  $\epsilon$  является диэлектрической проницаемостью относительно вакуума. В отличие от  $\epsilon_0$  она является безразмерной величиной. В вакууме величина  $\alpha = 0$  и  $\epsilon = 1$ . Ясно теперь, что введенная раньше постоянная  $\epsilon_0$  есть на самом деле абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума.

Из формулы (3.46) следует, что на границе диэлектрика с вакуумом выполняется соотношение

$$\epsilon E = E_0, \quad (3.48)$$

где  $E$  — поле внутри диэлектрика;  $E_0$  — поле в вакууме. Видно, что в диэлектрике роль электрического поля выполняет величина

$\varepsilon E$ . Величина

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad (3.49)$$

называется электрической индукцией. В вакууме  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ .

Таким образом, мы получили, что поле внутри диэлектрика в результате поляризации молекул ослабляется в  $\varepsilon$  раз

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (3.50)$$

Этот результат имеет важное следствие — все формулы, полученные для зарядов в вакууме, в диэлектрической среде должны быть изменены. Например, по закону Кулона, заряды, помещенные в диэлектрик, теперь взаимодействуют с силой, в  $\varepsilon$  раз меньшей:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (3.51)$$

Поле плоского конденсатора, если его заполнить диэлектриком, также уменьшается в  $\varepsilon$  раз

$$U = \frac{d}{\varepsilon \varepsilon_0 S} Q. \quad (3.52)$$

Соответственно емкость конденсатора при заполнении его диэлектриком возрастает:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \quad (3.53)$$

Плотность энергии электрического поля в диэлектрике:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{DE}{2}, \quad (3.54)$$

где  $E$  — поле внутри диэлектрика;  $D$  — электрическая индукция.

Выразим поле в диэлектрике через поле в вакууме с помощью формулы (3.50), Тогда (3.54) примет вид

$$w = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2\varepsilon}. \quad (3.55)$$

Сравнивая эту плотность с плотностью энергии электрического

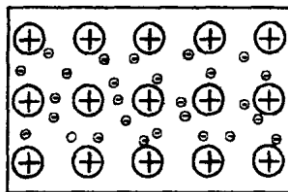
поля в вакууме, мы видим, что в диэлектрике она уменьшается в  $\epsilon$  раз при том же заряде на пластинах. Это означает, что, заполняя конденсатор диэлектриком, мы можем сообщать конденсатору сравнительно больший заряд при меньшей разности потенциалов между пластинами.

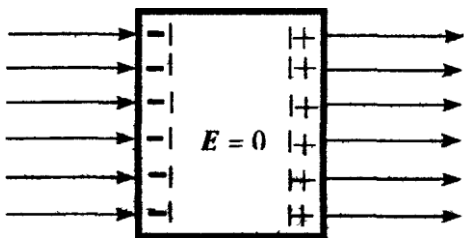
### 3.3.2. Проводники в электрическом поле

Наиболее характерным проводником является чистый металл: медь, железо, серебро и другие. Металл устроен следующим образом (рис.). Основу строения металла составляет металлическая решетка — упорядочено расположенные атомы металла, в которых отсутствует один или больше электронов, обычно входящих в структуру атома этого элемента. Такие положительно заряженные атомы или молекулы вещества называются ионами. Таким образом, металлическая решетка образована положительными ионами металла. Упорядоченное их расположение обусловлено силами электростатического отталкивания (кулоновскими силами) между ионами и отвечает минимальной величине их суммарной потенциальной энергии.

Расстояние между соседними ионами — так называемый период решетки — порядка размеров атома и составляет величину порядка  $10^{-4}$  микрометра ( $10^{-10}$  м). Другими словами, атомы в решетке расположены столь тесно, что электроны уже перестают быть связанными в каком-либо отдельном атоме и получают возможность свободно перемещаться по всему металлу. Такие электроны называются свободными.

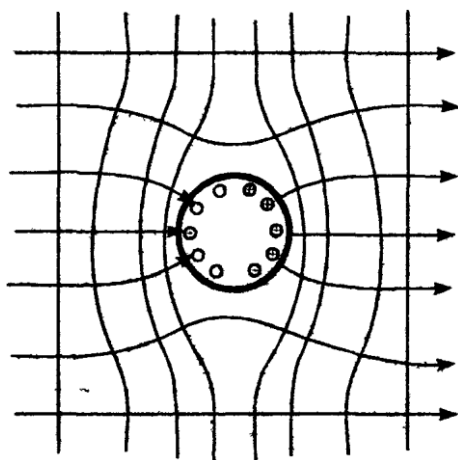
Таким образом, в первом приближении металл можно представлять как упорядоченную (кристаллическую) решетку тяжелых ионов, погруженную в идеальный газ свободных электронов. Число свободных электронов очень велико — порядка  $10^{22}$  частиц в  $1 \text{ см}^3$  — и строго равно суммарному заряду ионов решетки, поэтому металл остается в целом электрически нейтральным.





При помещении проводника во внешнее электрическое поле под действием этого поля происходит мгновенное перемещение свободных зарядов — электронов — против направления поля. Силы электрического взаимо-

действия с решеткой не позволяют электронам покинуть металл, поэтому происходит лишь небольшое смещение отрицательных зарядов, относительно решетки, на величину порядка нескольких ангстрем ( $10^{-4}$  мкм). В результате на поверхности проводника образуется избыток (недостаток) отрицательного заряда (рис.). Внутри же проводника по-прежнему суммарный электрический заряд в каждой точке остается равным нулю. Избыточный заряд на поверхности проводника создает электрическое поле, направленное против внешнего, то есть экранирует внешнее поле. Свободные электроны перетекают до тех пор, пока экранирующее поле не компенсирует внешнее на поверхности проводника. Следовательно, напряженность суммарного электрического поля в объеме проводника равна нулю, то есть внешнее поле не проникает в проводник.



Заряженная поверхность проводника подобна заряженной пластине плоского конденсатора. Поэтому, согласно теореме Гаусса, поле у внешней поверхности проводника точно равно поверхностной плотности заряда (деленной на  $\epsilon_0$ ) и направлено перпендикулярно поверхности проводника. Это означает, что поверхность проводника является

эквипотенциальной поверхностью. На поверхности незаряженного проводника потенциал равен нулю, а если проводнику сообщить заряд, то последний распределится по его поверхности, создавая отличный от нуля потенциал, одинаковый на всей поверхности проводника. Во внешнем электрическом Поле в весьма малой области вблизи поверхности проводника возникает избыток или недостаток свободных электронов (так называемый индуцированный заряд). Силовые линии внешнего поля нормальны к поверхности проводника и поэтому терпят разрыв — они заканчиваются на отрицательных зарядах и вновь начинаются на положительных. Таким образом, внешнее поле не проникает в проводник, и можно говорить об «обтекании» электрическим полем проводящих тел. На рис. показано обтекание внешним однородным электрическим полем незаряженного металлического шара. Показаны силовые линии поля, эквипотенциальные поверхности и заряд, индуцированный на поверхности шара, а также полость произвольной формы, созданная в объеме проводника. Поскольку внешнее поле не проникает в объем проводника, на границе полости не возникает индуцированного заряда. Таким образом, проводник во внешнем поле играет роль экранирующей поверхности. На этом свойстве проводников основан принцип электростатической защиты.

### ***3.4. Электрический ток***

#### **3.4.1. Сила и плотность тока**

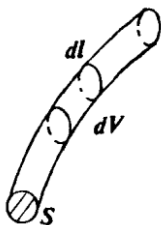
Электрический ток представляет собой направленное движение зарядов. Замечательным свойством проводников является способность проводить электрический ток, который в проводниках представляет собой поток свободных электронов. Количественной мерой электрического тока служит сила тока — количество заряда, проходящее через сечение проводника в единицу времени,

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.56)$$

Единицей силы тока является 1 ампер — ток, при котором в 1 секунду через сечение проводника протекает 1 кулон заряда. Про-

текающий по проводнику заряд равен числу электронов, каждый из которых несет на себе элементарный заряд  $q$ ,  $Q = q \cdot N$ . Поэтому сила тока есть произведение элементарного заряда на величину потока частиц:

$$I = q \frac{dN}{dt}. \quad (3.57)$$



Отсюда видно, что сила тока есть по существу величина потока заряда. Реально электрический ток протекает в проводниках определенной формы, характеризующихся определенными геометрическими размерами. Рассмотрим однородный проводник конечных размеров цилиндрической формы (провод), имеющий объем  $V$  и поперечное сечение  $S$  (рис.). Пусть в проводнике находятся  $N$  электронов. Выделим бесконечно малый элемент объема проводника  $dV = Sdl$ , где  $dl$  — бесконечно малый элемент длины проводника. Количество электронов, содержащихся в объеме  $dV$ :

$$dN = n \frac{dV}{V} = \frac{N}{V} Sdl$$

Подставив это выражение в формулу (3.57), запишем силу тока в виде:

$$I = q \frac{N}{V} S \frac{dl}{dt},$$

Заметим, что величина  $dl$  совпадает с перемещением электрона  $dl$  вдоль проводника. Поэтому  $dl/dt = v$  есть скорость электрона.

Окончательно для силы тока получаем:

$$I = q \frac{N}{V} Sv = qnvS, \quad (3.58)$$

где  $n$  — плотность электронов в проводнике.

Сила тока, отнесенная к площади поперечного сечения проводника



$$j = \frac{I}{S} = qnv \quad (3.59)$$

называется плотностью тока. Соответственно для однородного проводника

$$I = j \cdot S. \quad (3.60)$$

Плотность тока — векторная величина, ее можно записать в виде

$$\vec{j} = qn\vec{v}. \quad (3.61)$$

За направление тока в проводниках принимается направление движения положительных зарядов. Если плотность тока неравномерно распределена по сечению проводника, вместо (3.60) следует пользоваться более общей формулой:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (3.62)$$

Сравнивая (3.62) и (3.17), можно видеть, что сила тока равна величине потока вектора плотности тока через поверхность.

### 3.4.2. Закон Ома

Причиной, вызывающей направленное движение заряженных частиц, является сила, действующая на заряд со стороны электрического поля (3.4). Согласно второму закону Ньютона, эта сила приводит к изменению импульса частиц

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}. \quad (3.63)$$

Если заряд первоначально покоился, то в постоянном поле заряд приобретает импульс

$$\vec{p} = \int_0^t q\vec{E} dt = q\vec{E}t. \quad (3.64)$$

Если бы электроны металла имели возможность двигаться свободно, не испытывая столкновений, этот импульс мог бы увеличиваться беспрестанно. Однако в проводнике газ свободных электронов движется сквозь кристаллическую решетку тяжелых ионов металла. Поэтому время от времени электроны сталкиваются с ио-

нами решетки, при этом передавая последним частично или полностью свой импульс. После каждого такого столкновения электрону приходится заново начинать свое движение под действием поля. Характерное время между последовательными столкновениями зависит от плотности металла, степени его чистоты, температуры тела и других факторов и называется средним временем свободного пробега  $\tau$ . Таким образом, импульс, реально получаемый электроном металла во внешнем поле,

$$\vec{p} = q\vec{E}\tau. \quad (3.65)$$

Полный импульс, приобретаемый всеми электронами единицы объема проводника,

$$n \cdot p = n \cdot q \cdot E \cdot \tau. \quad (3.66)$$

Используя определение импульса  $p = mv$ , где  $m$  — масса электрона, находим отсюда направленную скорость частиц единицы

объема проводника  $n\vec{v} = \frac{q}{m} n\vec{E}\tau$ . Умножив это выражение на  $q$ , имеем плотность тока (3.61)

$$\vec{j} = qn\vec{v} = \frac{nq^2\tau}{m} \vec{E}. \quad (3.67)$$

Мы получили соотношение между напряженностью поля в проводнике и вызываемой ею плотностью электрического тока. Величина

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \quad (3.68)$$

называется удельной проводимостью металла или удельной электропроводностью. Рассчитанная на единицу объема, она характеризует способность проводника проводить электрический ток. Чем больше величина  $\sigma$ , тем большая плотность тока создается в проводнике при той же напряженности внешнего поля. Таким образом, соотношение (3.67) можно записать в форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (3.69)$$

Величина, обратная  $\sigma$ , называется удельным электрическим сопротивлением

$$\rho = 1/\sigma. \quad (3.70)$$

Воспользуемся связью между плотностью и силой тока (3.59), а также выразим напряженность поля через разность потенциалов на концах проводника. Для однородного поля  $E = (\varphi_1 - \varphi_2)/\ell = U/\ell$ , где  $\ell$  – длина проводника.

Связь между силой тока и разностью потенциалов имеет вид:

$$I = \frac{S}{\rho\ell}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{S}{\rho\ell}U. \quad (3.71)$$

Величина

$$R = \rho\ell/S \quad (3.72)$$

является электрическим сопротивлением проводника. Для нее существует единица измерения 1 Ом — сопротивление такого проводника, в котором разность потенциалов в 1 В создает ток в 1 А.

Разность потенциалов на концах проводника  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  называют падением напряжения на проводнике. В этих терминах соотношение (3.71) приобретает вид:

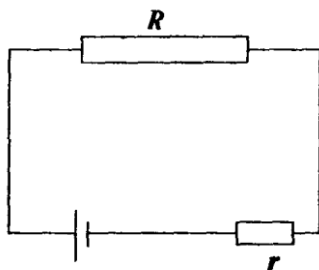
$$I = U/R, \quad (3.73)$$

который выражает собой хорошо известный закон Ома. Записанный в форме

$$U = I \cdot R, \quad (3.74)$$

он утверждает, что падение напряжения на проводнике равно произведению силы тока на сопротивление проводника. Закон Ома хорошо выполняется для широкой области температур, вплоть до самых низких, и широкой области электрических полей. Здесь мы не будем рассматривать отклонения от закона Ома, хотя, как и для всякого физического закона, для него существуют условия применимости.

### 3.4.3. Электрические цепи



Мы видели, что при помещении проводника в электрическое поле электрический ток возникает лишь в краткий начальный момент времени до тех пор, пока на поверхности не возникает индуцированный экранирующий заряд. После этого движение зарядов в проводнике прекращается, и поле внутри проводника становится равным нулю.

Для того, чтобы через проводник мог течь стационарный ток, проводник должен быть включен в замкнутую электрическую цепь, которая, кроме сопротивления проводников, включает в себя источник постоянного тока, которым может служить гальванический элемент или батарея. Разность потенциалов, создаваемая источником тока, называется электродвижущей силой — ЭДС. Подчеркнем, что ЭДС имеет не электростатическое происхождение. Величина ЭДС определяется как работа сторонних сил, необходимая для перемещения в цепи единицы заряда.

На рис.  $R$  — сопротивление проводника, подсоединенного к источнику тока,  $r$  — внутреннее сопротивление самого источника тока. Ток, протекающий в цепи, равен, согласно закону Ома, разности потенциалов, создаваемой источником тока, — электродвижущей силе проводника  $\varepsilon$ , — деленной на полное сопротивление цепи:

$$I = \varepsilon / (R + r). \quad (3.75)$$

Падение напряжения во внешней цепи:

$$U_R = I \cdot R. \quad (3.76)$$

Напряжение на выходе источника тока:

$$U_\varepsilon = \varepsilon - I \cdot R = \varepsilon r / (R + r) \quad (3.77)$$

Обычно электрические цепи не столь просты, как на рис, а могут быть разветвленными и содержать большое количество различных сопротивлений и источников тока. Расчет токов и напряжений в сложных цепях производится с помощью следующих пра-

вил Кирхгофа:

1. В каждом узле цепи сумма втекающих токов равна сумме вытекающих. Это правило выражает собой просто сохранение потока (в данном случае потока заряда).

2. В любом замкнутом, контуре разветвленной цепи. сумма падений напряжений на сопротивлениях, включенных в этот контур, равна сумме ЭДС, приложенных к нему.

$$\sum_k I_k R_k = \sum_i \varepsilon_i . \quad (3.78)$$

Это правило есть простое обобщение соотношения (3.75) для сложной цепи.

Рассмотрим мощность электрического тока, выделяемую в цепи. При перемещении заряда  $dQ$  в поле с разностью потенциалов  $U$  совершается работа  $dA = dQ \cdot U$ . Отсюда мощность

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = IU . \quad (3.79)$$

Используя закон Ома, ее можно выразить следующими формулами:

$$P = I^2 R = U^2 / R . \quad (3.80)$$

Совершаемая током работа идет на нагревание проводника, то есть превращается в тепло. Механизмом этого превращения служат столкновения электронов с кристаллической решеткой. Согласно формулам (3.79), (3.80) выделяемое в проводнике за время  $t$  тепло

$$W = I \cdot U \cdot t = I \cdot R \cdot t . \quad (3.81)$$

Это хорошо известный закон Джоуля-Ленца.

## Контрольная работа 3

### Задачи для самостоятельного решения

1. Два шарика массой  $m = 1$  г каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены вместе. Длина каждой нити  $\ell = 10$  см. Какие одинаковые заряды надо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись на угол  $\alpha = 60^\circ$ ? [79 нКл]
2. Расстояние между зарядами  $Q_1 = 100$  нКл и  $Q_2 = -50$  нКл равно  $d = 10$  см. Определить силу  $F$ , действующую на заряд  $Q_3 = 1$  мкКл, отстоящую на  $r_1 = 12$  см от заряда  $Q_1$  и на  $r_2 = 10$  см от заряда  $Q_2$ . [51 мН]
3. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau = 1,5$  нКл/см. На продолжении оси стержня на расстоянии  $d = 12$  см от его конца находится точечный заряд  $Q = 0,2$  мкКл. Определить силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда. [2,25 мН]
4. Длинная прямая тонкая проволока несет равномерно распределенный заряд. Вычислить линейную плотность  $\tau$  заряда, если напряженность поля на расстоянии  $r = 0,5$  м от проволоки против ее середины  $E = 2$  В/см. [5,55 нКл/м]
5. С какой силой приходящейся на единицу площади, отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно протяженные плоскости с одинаковой поверхностной плотностью заряда  $\sigma = 2$  мкКл/м<sup>2</sup>? [0,23 Н/м<sup>2</sup>]
6. Какую ускоряющую разность потенциалов  $U$  должен пройти электрон, чтобы получить скорость  $v = 8$  Мм/с? [182 В]
7. Заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью  $\sigma = 10$  нКл/м<sup>2</sup>. Определить разность потенциалов двух точек поля, одна из которых находится на плоскости, а другая удалена от нее на расстояние  $a = 10$  см. [56,6 В]
8. Электрон с начальной скоростью  $v = 3$  Мм/с влетел в однородное электрическое поле напряженностью  $E = 150$  В/м. Вектор начальной скорости перпендикулярен линиям напряженности электрического поля. Определить: 1) силу, действующую на

- электрон; 2) ускорение, приобретаемое электроном; 3) скорость электрона через  $t=0,1$  мкс. [24 Н; 26,4 м/с<sup>2</sup>; 4 Мм/с]
9. К батарее с ЭДС  $\varepsilon = 300$  В включены два плоских конденсатора емкостями  $C_1 = 2$  пФ и  $C_2 = 3$  пФ. Определить заряд  $Q$  и напряжение  $U$  на пластинках конденсаторов при последовательном и параллельном соединениях. [1) 0,36 нКл; 180 В; 120 В; 2) 0,6 нКл; 0,9 нКл; 300 В]
  10. Конденсатор емкостью  $C_1 = 600$  пФ зарядили до разности потенциалов  $U_1 = 1,5$  кВ и отключили от источника напряжения. Затем к нему параллельно присоединили незаряженный конденсатор емкостью  $C_2 = 400$  пФ. Определить энергию, израсходованную на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов. [0,27 мДж]
  11. На концах медного провода длиной  $\ell = 5$  м поддерживается напряжение  $U = 1$  В. Определить плотность тока  $j$  в проводе. [ $1,18 \cdot 10^7$  А/м<sup>2</sup>]
  12. Резистор сопротивлением  $R_1 = 5$  Ом, вольтметр и источник тока соединены параллельно. Вольтметр показывает напряжение  $U = 10$  В. Если заменить резистор другим с сопротивлением  $R_2 = 12$  Ом, то вольтметр покажет напряжение  $U_2 = 12$  В. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока. Током через вольтметр пренебречь. [14 В; 2 Ом]
  13. Определить электрический заряд, прошедший через поперечное сечение провода сопротивлением  $R = 3$  Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от  $U_1 = 2$  В до  $U_2 = 4$  В в течение  $t = 20$  с. [20 Кл]
  14. Определить силу тока в цепи, состоящей из двух элементов с ЭДС  $\varepsilon_1 = 1,6$  В и  $\varepsilon_2 = 1,2$  В и внутренними сопротивлениями  $R_1 = 0,6$  Ом и  $R_2 = 0,4$  Ом, соединенных одноименными полюсами. [0,4 А]
  15. Гальванический элемент дает на внешнее сопротивление  $R_1 = 0,5$  Ом силу тока  $I_1 = 0,2$  А. Если внешнее сопротивление заменить на  $R_2 = 0,8$  Ом, то элемент дает силу тока  $I_2 = 0,15$  А. Определить силу тока короткого замыкания. [0,45 А]
  16. К источнику тока с ЭДС  $\varepsilon = 12$  В присоединена нагрузка. На-

пряжение  $U$  на клеммах источника стало при этом равным 8 В. Определить КПД источника тока. [68%]

17. Внешняя цепь источника тока потребляет мощность  $P = 0,75$  Вт. Определить силу тока в цепи, если ЭДС источника тока  $\varepsilon = 2$  В и внутреннее сопротивление  $R = 1$  Ом. [0,5 и 1,5 А]
18. Какая наибольшая полезная мощность  $P_{max}$  может быть получена от источника тока с ЭДС  $\varepsilon = 12$  В и внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом? [36 Вт]
19. При выключении источника тока сила тока в цепи убывает по закону  $I = I_0 e^{-\alpha t}$  ( $I_0 = 10$  А,  $\alpha = 5 \cdot 10^2$  с<sup>-1</sup>). Определить количество теплоты, которое выделится в резисторе сопротивлением  $R = 5$  Ом после выключения источника тока. [0,5 Дж]

Таблица вариантов для специальностей, учебными планами которых предусмотрено по курсу физики шесть контрольных работ.

Вариант	Номера задач							
	310	320	330	340	350	360	370	380
0	310	320	330	340	350	360	370	380
1	301	311	321	331	341	351	361	371
2	302	312	322	332	342	352	362	372
3	303	313	323	333	343	353	363	373
4	304	314	324	334	344	354	364	374
5	305	315	325	335	345	355	365	375
6	306	316	326	336	346	356	366	376
7	307	317	327	337	347	357	367	377
8	308	318	328	338	348	358	368	378
9	309	319	329	339	349	359	369	379

301. Точечные заряды  $Q_1 = 20$  мкКл,  $Q_2 = -10$  мкКл находятся на расстоянии  $d = 5$  см друг от друга. Определить напряженность поля в точке, удаленной на  $r_1 = 3$  см от первого и на  $r_2 = 4$  см от



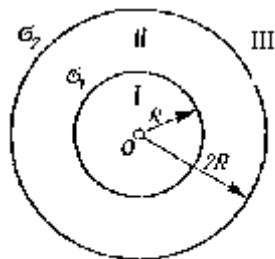
- второго заряда. Определить также силу  $F$ , действующую в этой точке на точечный заряд  $Q = 1$  мкКл.
302. Три одинаковых точечных заряда  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 2$  нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника со сторонами  $a = 10$  см. Определить модуль и направление силы  $F$ , действующей на один из зарядов со стороны двух других.
303. Два положительных точечных заряда  $Q$  и  $9Q$  закреплены на расстоянии  $d = 100$  см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд так, чтобы он находился в равновесии. Указать, какой знак должен иметь этот заряд для того, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещения зарядов возможны только вдоль прямой, проходящей через закрепленные заряды.
304. Два одинаково заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол  $\alpha$ . Шарик погружают в масло. Какова плотность  $\rho$  масла, если угол расхождения нитей при погружении в масло остается неизменным? Плотность материала шариков  $\rho_0 = 1,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, диэлектрическая проницаемость масла  $\varepsilon = 2,2$ .
305. Четыре одинаковых заряда  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 40$  нКл закреплены в вершинах квадрата со стороной  $a = 10$  см. Найти силу  $F$ , действующую на один из этих зарядов со стороны трех остальных.
306. Точечные заряды  $Q_1 = 30$  мкКл и  $Q_2 = -20$  мкКл находятся на расстоянии  $d = 20$  см друг от друга. Определить напряженность электрического поля  $E$  в точке, удаленной от первого заряда на расстояние  $r_1 = 30$  см, а от второго — на  $r_2 = 15$  см.
307. В вершинах правильного треугольника со стороной  $a = 10$  см находятся заряды  $Q_1 = 10$  мкКл,  $Q_2 = 20$  мкКл и  $Q_3 = 30$  мкКл. Определить силу  $F$ , действующую на заряд  $Q_1$  со стороны двух других зарядов.
308. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 8 \cdot 10^{-10}$  Кл. Какой отрицательный заряд  $Q$  нужно поместить в центре квадрата, чтобы сила взаимного отталкивания положительных зарядов была уравновешена силой притяжения отрицательного заряда?

309. На расстоянии  $d = 20$  см находятся два точечных заряда:  $Q_1 = -50$  нКл и  $Q_2 = 100$  нКл. Определить силу  $F$ , действующую на заряд  $Q_3 = -10$  нКл, удаленный от обоих зарядов на одинаковое расстояние, равное  $d$ .
310. Расстояние  $d$  между двумя точечными зарядами  $Q_1 = 2$  нКл и  $Q_2 = 4$  нКл равно 60 см. Определить точку, в которую нужно поместить третий заряд  $Q_3$  так, чтобы система зарядов находилась в равновесии. Определить заряд  $Q_3$  и его знак. Устойчивое или неустойчивое будет равновесие?
311. Тонкий стержень длиной  $\ell = 20$  см несет равномерно распределенный заряд  $\tau = 0,1$  мкКл. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $A$ , лежащей на оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от его конца.
312. По тонкому полукольцу радиуса  $R = 10$  см равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 1$  мкКл/м. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.
313. Тонкое кольцо несет распределенный заряд  $Q = 0,2$  мкКл. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $A$ , равноудаленной от всех точек кольца на расстояние  $r = 20$  см. Радиус кольца  $R = 10$  см.
314. Треть тонкого кольца радиуса  $R = 10$  см несет распределенный заряд  $Q = 50$  нКл. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.
315. Бесконечный тонкий стержень, ограниченный с одной стороны, несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью  $\tau = 0,5$  мкКл/м. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $A$ , лежащей на оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от его начала.
316. По тонкому кольцу радиусом  $R = 20$  см равномерно распределен с линейной плотностью  $\tau = 0,2$  мкКл/м заряд. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $A$ , находящейся на оси кольца на рас-

стоянии  $h = 2R$  от его центра.

317. По тонкому полукольцу равномерно распределен заряд  $Q = 20$  мкКл с линейной плотностью  $\tau = 0,1$  мкКл/м. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.
318. Четверть тонкого кольца радиусом  $R = 10$  см несет равномерно распределенный заряд  $Q = 0,05$  мкКл. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.
319. По тонкому кольцу равномерно распределен заряд  $Q = 10$  нКл с линейной плотностью  $\tau = 0,01$  мкКл/м. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $A$ , лежащей на оси кольца и удаленной от его центра на расстояние, равное радиусу кольца.
320. Две трети тонкого кольца радиусом  $R = 10$  см несут равномерно распределенный с линейной плотностью  $\tau = 0,2$  мкКл/м заряд. Определить напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.

321. На двух concentрических сферах радиусом  $R$  и  $2R$  равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Требуется:
- 1) используя теорему Остроградского—Гаусса, найти зависимость  $E(r)$  напряженности электрического поля от расстояния для трех областей:  $I$ ,  $II$  и  $III$ . Принять  $\sigma_1 = 4\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ ;

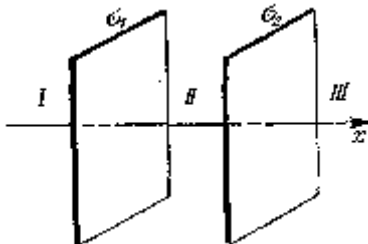


- 2) вычислить напряженность  $E$  в точке, удаленной от центра на расстояние  $r$ , и указать направление вектора  $E$ . Принять  $\sigma = 30$  нКл/м<sup>2</sup>,  $r = 1,5R$ ;
  - 3) построить график  $E(r)$ .
322. См. условие задачи 321. В п. 1 принять  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -\sigma$ . В п. 2 принять  $\sigma = 0,1$  мкКл/м<sup>2</sup>,  $r = 3R$ .
323. См. условие задачи 321. В п. 1 принять  $\sigma_1 = -4\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ . В п. 2

принять  $\sigma = 50 \text{ нКл/м}^2$ ,  $r = 1,5R$ .

324. См. условие задачи 321. В п. 1 принять  $\sigma_1 = -2\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ . В п. 2 принять  $\sigma = 0,1 \text{ мКл/м}^2$ ,  $r = 3R$ .

325. На двух бесконечных параллельных плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Требуется:



1) используя теорему Остроградского—Гаусса и принцип суперпозиции электрических полей, найти выражение  $E(x)$  напряженности электрического поля в трех областях:

$I$ ,  $II$  и  $III$ . Принять  $\sigma_1 = 2\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ ;

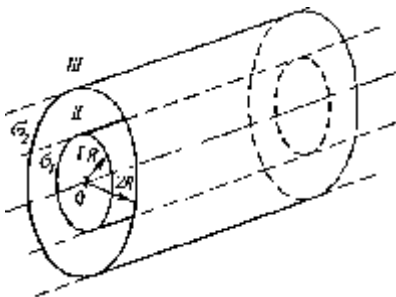
2) вычислить напряженность  $E$  поля в точке, расположенной слева от плоскостей, и указать направление вектора  $E$ ;

3) построить график  $E(x)$ .

326. См. условие задачи 325. В п. 1 принять  $\sigma_1 = -4\sigma$ ,  $\sigma_2 = 2\sigma$ . В п. 2 принять  $\sigma = 40 \text{ нКл/м}^2$  и точку расположить между плоскостями.

327. См. условие задачи 325. В п. 1 принять  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -2\sigma$ . В п. 2 принять  $\sigma = 20 \text{ нКл/м}^2$  и точку расположить справа от плоскостей.

328. На двух коаксиальных бесконечных цилиндрах радиусами  $R$  и  $2R$  равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Требуется:



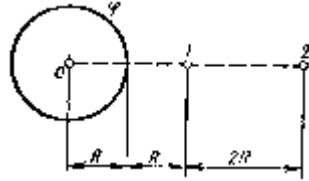
1) используя теорему Остроградского—Гаусса: найти зависимость  $E(r)$  напряженности электрического поля от расстояния для трех областей:  $I$ ,  $II$  и  $III$ . Принять  $\sigma_1 = -2\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ ;

2) вычислить напряженность  $E$  в точке, удаленной от оси цилиндров на расстояние  $r$ , и указать направление вектора  $E$ . Принять  $\sigma_1 = 50 \text{ нКл/м}^2$ ,  $r = 1,5R$ ;

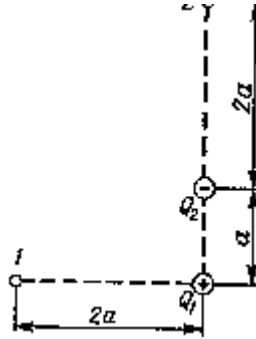
в точке, удаленной от оси цилиндров на расстояние  $r$ , и указать направление вектора  $E$ . Принять  $\sigma_1 = 50 \text{ нКл/м}^2$ ,  $r = 1,5R$ ;

3) построить график  $E(r)$ .

329. См. условие задачи 328. В п. 1 принять  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -\sigma$ . В п. 2 принять  $\sigma = 60 \text{ нКл/м}^2$ ,  $r = 3R$ .
330. См. условие задачи 328. В п. 1 принять  $\sigma_1 = -\sigma$ ,  $\sigma_2 = 4\sigma$ . В п. 2 принять  $\sigma = 30 \text{ нКл/м}^2$ ,  $r = 4R$ .
331. Два точечных заряда  $Q_1 = 6 \text{ нКл}$  и  $Q_2 = 3 \text{ нКл}$  находятся на расстоянии  $d = 60 \text{ см}$  друг от друга. Какую работу необходимо совершить внешним силам, чтобы уменьшить расстояние между зарядами вдвое?
332. Электрическое поле создано заряженным проводящим шаром, потенциал  $\phi$  которого  $300 \text{ В}$ . Определить работу сил поля по перемещению заряда  $Q = 0,2 \text{ мкКл}$  из точки 1 в точку 2.



333. Электрическое поле создано зарядами  $Q_1 = 2 \text{ мкКл}$  и  $Q_2 = -2 \text{ мкКл}$ , находящимися на расстоянии  $a = 10 \text{ см}$  друг от друга. Определить работу сил поля, совершаемую при перемещении заряда  $Q = 0,5 \text{ мкКл}$  из точки 1 в точку 2.



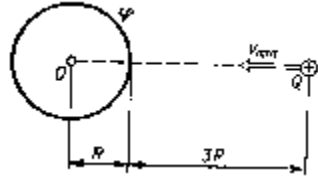
334. Две параллельные заряженные плоскости, поверхностные плотности заряда которых  $\sigma_1 = 2 \text{ мкКл/м}^2$  и  $\sigma_2 = -0,8 \text{ мкКл/м}^2$ , находятся на расстоянии  $d = 0,6 \text{ см}$  друг от друга. Определить разность потенциалов  $U$  между плоскостями.
335. Диполь с электрическим моментом  $p = 100 \text{ пКл}\cdot\text{м}$  свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью  $E = 200 \text{ кВ/м}$ . Определить работу внешних сил, которую необходимо совершить для поворота диполя на угол  $\alpha = 180^\circ$ .
336. Четыре одинаковых капли ртути, заряженных до потенциала  $\phi = 10 \text{ В}$ , сливаются в одну. Каков потенциал  $\phi_1$  образовавшейся

- ся капли?
337. Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом  $R = 10$  см. Он равномерно заряжен с линейной плотностью заряда  $\tau = 800$  нКл/м. Определить потенциал  $\varphi$  в точке, расположенной на оси кольца на расстоянии  $h = 10$  см от его центра.
338. Поле образовано точечным диполем с электрическим моментом  $p = 200$  пКл·м. Определить разность потенциалов  $U$  двух точек поля, расположенных симметрично относительно диполя на его оси на расстоянии  $r = 40$  см от центра диполя.
339. Электрическое поле образовано бесконечно длинной заряженной нитью, линейная плотность заряда которой  $\tau = 20$  пКл/м. Определить разность потенциалов  $U$  двух точек поля, отстоящих от нити на расстоянии  $r_1 = 8$  см и  $r_2 = 12$  см.
340. Тонкая квадратная рамка равномерно заряжена с линейной плотностью заряда  $\tau = 200$  пКл/м. Определить потенциал  $\varphi$  поля в точке пересечения диагоналей.
341. Пылинка массой  $m = 200$  мкг, несущая на себе заряд  $Q = 40$  нКл, влетела в электрическое поле в направлении силовых линий. После прохождения разности потенциалов  $U = 200$  В пылинка имела скорость  $v = 10$  м/с. Определить скорость  $v_0$  пылинки до того, как она влетела в поле.
342. Электрон, обладавший кинетической энергией  $T = 10$  эВ, влетел в однородное электрическое поле в направлении силовых линий поля. Какой скоростью будет обладать электрон, пройдя в этом поле разность потенциалов  $U = 8$  В?
343. Найти отношение скоростей ионов  $Cu^{++}$  и  $K^+$ , прошедших одинаковую разность потенциалов.
344. Электрон с энергией  $T = 400$  эВ (в бесконечности) движется вдоль силовой линии по направлению к поверхности металлической заряженной сферы радиусом  $R = 10$  см. Определить минимальное расстояние  $a$ , на которое приблизится электрон к поверхности сферы, если заряд ее  $Q = -10$  нКл.
345. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобрел скорость  $v = 10^5$  м/с. Расстояние между пластинами  $d = 8$  мм. Найти: 1) разность потенциалов  $U$

между пластинами; 2) поверхностную плотность заряда  $\sigma$  на пластинах.

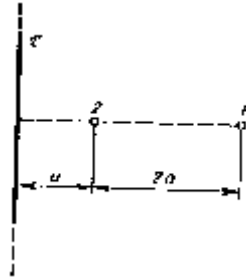
346. Пылинка массой  $m = 5$  нг, несущая на себе  $N = 10$  электронов, прошла в вакууме ускоряющую разность потенциалов  $U = 1$  МВ. Какова кинетическая энергия  $T$  пылинки? Какую скорость  $v$  приобрела пылинка?

347. Какой минимальной скоростью  $v_{min}$ , должен обладать протон, чтобы он мог достигнуть поверхности заряженного до потенциала  $\varphi = 400$  В металлического шара?



348. В однородное электрическое поле напряженностью  $E = 200$  В/м влетает (вдоль силовой линии) электрон со скоростью  $v_0 = 2$  Мм/с. Определить расстояние  $l$ , которое пройдет электрон до точки, в которой его скорость будет равна половине начальной.

349. Электрическое поле создано бесконечной заряженной прямой линией с равномерно распределенным зарядом ( $\sigma = 10$  нКл/м). Определить кинетическую энергию  $T_2$  электрона в точке 2, если в точке 1 его кинетическая энергия  $T_1 = 200$  эВ.



350. Электрон движется вдоль силовой линии однородного электрического поля. В некоторой точке поля с потенциалом  $\varphi_1 = 100$  В электрон имел скорость  $v_1 = 6$  Мм/с. Определить потенциал  $\varphi_2$  точки поля, дойдя до которой электрон потеряет половину своей скорости.

351. Конденсаторы емкостью  $C_1 = 5$  мкФ и  $C_2 = 10$  мкФ заряжены до напряжений  $U_1 = 60$  В и  $U_2 = 100$  В соответственно. Определить напряжение на обкладках конденсаторов после их соединения обкладками, имеющими одноименные заряды.

352. Конденсатор емкостью  $C_1 = 10$  мкФ заряжен до напряжения  $U = 10$  В. Определить заряд на обкладках этого конденсатора после того, как параллельно ему был подключен другой, неза-

- ряженный, конденсатор емкостью  $C_2 = 20$  мкФ.
353. Конденсаторы емкостями  $C_1 = 2$  мкФ,  $C_2 = 5$  мкФ и  $C_3 = 10$  мкФ соединены последовательно и находятся под напряжением  $U = 850$  В. Определить напряжение и заряд на каждом из конденсаторов.
354. Два конденсатора емкостями  $C_1 = 2$  мкФ и  $C_2 = 5$  мкФ заряжены до напряжений  $U_1 = 100$  В и  $U_2 = 150$  В соответственно. Определить напряжение на обкладках конденсаторов после их соединения обкладками, имеющими разноименные заряды.
355. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора емкостью  $C = 100$  пФ каждый соединены в батарею последовательно. Определить, на сколько изменится емкость  $C_b$  батареи, если пространство между пластинами одного из конденсаторов заполнить парафином.
356. Два конденсатора емкостями  $C_1 = 5$  мкФ и  $C_2 = 8$  мкФ соединены последовательно и присоединены к батарее с ЭДС  $\varepsilon = 80$  В. Определить заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  конденсаторов и разности потенциалов  $U_1$  и  $U_2$  между их обкладками.
357. Плоский конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом  $R = 10$  см каждая. Расстояние между пластинами  $d = 2$  мм. Конденсатор присоединен к источнику напряжения  $U = 80$  В. Определить заряд  $Q$  и напряженность  $E$  поля конденсатора в двух случаях: а) диэлектрик – воздух; б) диэлектрик – стекло.
358. Два металлических шарика радиусами  $R_1 = 5$  см и  $R_2 = 10$  см имеют заряды  $Q_1 = 40$  нКл и  $Q_2 = -20$  нКл соответственно. Найти энергию  $W$ , которая выделится при разряде, если шары соединить проводником.
359. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектрика: стекла толщиной  $d_1 = 0,2$  см и слоем парафина толщиной  $d_2 = 0,3$  см. Разность потенциалов между обкладками  $U = 300$  В. Определить напряженность  $E$  поля и падение потенциала в каждом из слоев.
360. Плоский конденсатор с площадью пластин  $S = 200$  см<sup>2</sup> каждая заряжен до разности потенциалов  $U = 2$  кВ. Расстояние между пластинами  $d = 2$  см. Диэлектрик – стекло. Определить энер-



- гию  $W$  поля конденсатора и плотность энергии  $w$  поля.
361. Катушка и амперметр соединены последовательно и подключены к источнику тока. К клеммам катушки присоединен вольтметр с сопротивлением  $r = 4$  кОм. Амперметр показывает силу тока  $I = 0,3$  А, вольтметр – напряжение  $U = 120$  В. Определить сопротивление  $R$  катушки. Определить относительную погрешность  $\delta$ , которая будет допущена при измерении сопротивления, если пренебречь силой тока, текущего через вольтметр.
362. ЭДС батареи  $\varepsilon = 80$  В, внутреннее сопротивление  $R_i = 5$  Ом. Внешняя цепь потребляет мощность  $P = 100$  Вт. Определить силу тока  $I$  в цепи, напряжение  $U$ , под которым находится внешняя цепь, и ее сопротивление  $R$ .
363. От батареи, ЭДС которой  $\varepsilon = 600$  В, требуется передать энергию на расстояние  $\ell = 1$  км. Потребляемая мощность  $P = 5$  кВт. Найти минимальные потери мощности в сети, если диаметр медных подводящих проводов  $d = 0,5$  см.
364. При внешнем сопротивлении  $R_1 = 8$  Ом сила тока в цепи  $I_1 = 0,8$  А, при сопротивлении  $R_2 = 15$  Ом сила тока  $I_2 = 0,5$  А, Определить силу тока  $I_{кз}$  короткого замыкания источника ЭДС.
365. ЭДС батареи  $\varepsilon = 24$  В. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея,  $I_{max} = 10$  А. Определить максимальную мощность  $P_{max}$ , которая может выделяться во внешней цепи.
366. Аккумулятор с ЭДС  $\varepsilon = 12$  В заряжается от сети постоянного тока с напряжением  $U = 15$  В. Определить напряжение на клеммах аккумулятора, если его внутреннее сопротивление  $R_i = 10$  Ом.
367. От источника с напряжением  $U = 800$  В необходимо передать потребителю мощность  $P = 10$  кВт на некоторое расстояние. Какое наибольшее сопротивление может иметь линия передачи, чтобы потери энергии в ней не превышали 10% от передаваемой мощности?
368. При включении электромотора в сеть с напряжением  $U = 220$  В он потребляет ток  $I = 5$  А. Определить мощность, по-

- требляемую мотором, и его КПД, если сопротивление  $R$  обмотки мотора равно 6 Ом.
369. В сеть с напряжением  $U = 100$  В подключили катушку с сопротивлением  $R_1 = 2$  кОм и вольтметр, соединенные последовательно. Показание вольтметра  $U_1 = 80$  В. Когда катушку заменили другой, вольтметр показал  $U_2 = 60$  В. Определить сопротивление  $R_2$  другой катушки.
370. ЭДС батареи  $\varepsilon = 12$  В. При силе тока  $I = 4$  А КПД батареи  $\eta = 0,6$ . Определить внутреннее сопротивление  $R_i$  батареи.
371. За время  $t = 20$  с при равномерно возрастающей силе тока от нуля до некоторого максимума в проводнике сопротивлением  $R = 5$  Ом выделилось количество теплоты  $Q = 4$  кДж. Определить скорость нарастания силы тока в этом проводнике.
372. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону  $I = I_0 e^{-\alpha t}$ , где  $I_0 = 20$  А,  $\alpha = 10^2 \text{ с}^{-1}$ . Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за время  $t = 10^{-2}$  с.
373. Сила тока в проводнике сопротивлением  $R = 10$  Ом за время  $t = 50$  с равномерно нарастает от  $I_1 = 5$  А до  $I_2 = 10$  А. Определить количество теплоты  $Q$ , выделившееся за это время в проводнике.
374. В проводнике за время  $t = 10$  с при равномерном возрастании силы тока от  $I_1 = 1$  А до  $I_2 = 2$  А выделилось количество теплоты  $Q = 5$  кДж. Найти сопротивление  $R$  проводника.
375. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону  $I = I_0 \sin \omega t$ . Найти заряд  $Q$ , проходящий через поперечное сечение проводника за время  $t$ , равное половине периода  $T$ , если начальная сила тока  $I_0 = 10$  А, циклическая частота  $\omega = 50\pi \text{ с}^{-1}$ .
376. За время  $t = 10$  с при равномерно возрастающей силе тока от нуля до некоторого максимума в проводнике выделилось количество теплоты  $Q = 40$  кДж. Определить среднюю силу тока  $\langle I \rangle$  в проводнике, если его сопротивление  $R = 25$  Ом.
377. За время  $t = 8$  с при равномерно возрастающей силе тока в проводнике сопротивлением  $R = 8$  Ом выделилось количество теплоты  $Q = 500$  Дж. Определить заряд  $q$ , проходящий в проводнике, если сила тока в начальный момент времени равна нулю.

378. Определить количество теплоты  $Q$ , выделившееся за время  $t = 10$  с в проводнике сопротивлением  $R = 10$  Ом, если сила тока в нем, равномерно уменьшаясь, изменилась от  $I_1 = 10$  А до  $I_2 = 0$ .
379. Сила тока в цепи изменяется по закону  $I = I_0 \sin \omega t$ . Определить количество теплоты, которое выделится в проводнике сопротивлением  $R = 10$  Ом за время, равное четверти периода (от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = T/4$ , где  $T = 10$  с).
380. Сила тока в цепи изменяется со временем по закону  $I = I_0 e^{-\alpha t}$ . Определить количество теплоты, которое выделится в проводнике сопротивлением  $R = 20$  Ом за время, в течение которого ток уменьшится в  $n$  раз.  
Коэффициент  $\alpha$  принять равным  $2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ .

### 3.5. Магнитостатика

#### 3.5.1. Природа магнитного поля

Помимо кулоновского взаимодействия зарядов, в природе существует взаимодействие посредством магнитного поля. Магнитное взаимодействие наблюдается как между макроскопическими телами, так и между отдельными частицами, в том числе и элементарными. Взаимодействовать через магнитное поле могут как заряженные, так и незаряженные тела, что указывает на отсутствие непосредственной связи магнитного взаимодействия с электростатическим. Существует большое число явлений, на первый взгляд не связанных друг с другом, которые, однако, имеют в своей основе магнитные взаимодействия. В опытах Ампера и других, относящихся к первой половине XIX века, было установлено, что между проводниками при протекании в них электрического тока возникают силы притяжения и отталкивания магнитного характера. Был установлен опытный факт возникновения магнитного поля в пространстве, окружающем проводник с током. Вместе с тем, существует ряд хороших проводников металлов, таких как железо, которые создают магнитное поле вокруг себя даже при отсутствии протекания через них электрического тока. Другими словами, эти металлы обладают собственным магнитным полем. Такие веществ-

ва называются магнетиками.

Существуют магнетики и среди диэлектриков.

Таким образом, весьма различные по своей природе вещества — немагнитные проводники, магнитные металлы и диэлектрики — обладают способностью создавать магнитное поле.

Возникает вопрос: что может служить источником магнитного поля в указанных средах, или каков механизм его возникновения?

Проще всего было бы предположить, что существуют «магнитные заряды», аналогичные электрическим. Такие предположения делались, но все попытки экспериментально обнаружить такие заряды оказались безуспешными. Следовательно, нужно считать, что в природе магнитных зарядов не существует.

Вместе с тем из факта возникновения магнитного поля при протекании тока по проводнику можно сделать вывод, что элементарным носителем магнитных свойств является сам элемент тока. Для обычных проводников этот вывод правдоподобен; но как быть с остальными средами?

После того как было изучено строение атомов и молекул, стало ясно, что в отдельных атомах и молекулах вещества также существуют элементарные токи, связанные с движением зарядов внутри этих частиц. Эти элементарные токи также должны вносить вклад в магнитные свойства вещества.

Дальнейшее изучение свойств элементарных частиц — электрона, протона и других — показало, что этим частицам присущ новый тип движения, который до тех пор не проявлялся на макроскопическом уровне. С возможностью движения такого рода также следует связать появление магнитных свойств отдельных частиц.

С точки зрения механики с каждым из возможных типов движения связан вполне определенный момент импульса, то есть механический момент. Для частиц, обладающих зарядом, соответствующая этому механическому моменту магнитная величина называется магнитным моментом. Оказывается, что магнитный момент как раз и играет роль элементарного носителя магнитных свойств, являясь своего рода «элементарным магнитом». В каждой из указанных выше сред магнитные моменты имеют разную природу и величину, будучи связанными с различными типами движения за-

рядов. Но суммарные магнитные моменты, отвечающие всем возможным типам движения зарядов в среде, определяют величину и распределение магнитного поля в пространстве.

Таким образом, происхождение магнитного поля связано с движением электрических зарядов. Тот факт, что покоящийся заряд создает электрическое поле, а движущийся — магнитное, позволяет утверждать, что электрическое и магнитное поля представляют собой вовсе не различные физические поля, а оказываются различными проявлениями одного и того же электромагнитного поля заряда. В зависимости от относительной скорости движения двух зарядов сила, действующая на заряды, будет иметь электрический либо магнитный характер. Таким образом, представление об электрическом либо магнитном поле является относительным. В различных инерциальных системах отсчета электромагнитное поле заряда будет выглядеть по-разному.

В движущейся системе отсчета, в которой заряд покоится, мы будем наблюдать только электрическое поле, а в системе координат, в которой заряд движется, — и электрическое, и магнитное поля одновременно. В частности, можно выбрать такую систему отсчета, в которой электрическое поле будет равно нулю, а магнитное — отлично от нуля.

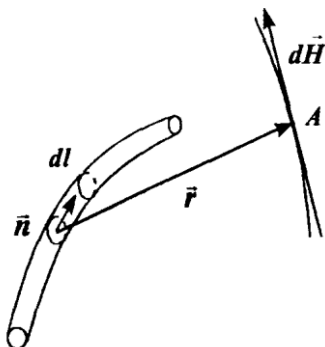
Мы будем изучать магнитное поле движущихся зарядов в покоящейся лабораторной системе отсчета. При движении заряженных частиц — электронов — в проводнике их заряд компенсирован положительным зарядом решетки. Поэтому электрическое поле вне проводника отсутствует, а возникает только магнитное поле.

### **3.5.2. Свойства магнитного поля. Закон Био-Савара**

Как всякое другое силовое поле, магнитное поле можно характеризовать силовыми линиями. По аналогии с электрическим полем векторы, касательные к силовым линиям, являются векторами напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Однако в отличие от электрического поля вектор  $\mathbf{H}$  должен быть пропорционален не величине заряда, а потоку заряда в проводнике. Найдём связь между ними.

Возьмем проводник произвольной формы и мысленно разобьём

его на бесконечно малые элементы (рис.). Введем вектор  $d\ell = n d\ell$ , где  $n$  – единичный вектор в направлении потока электронов в выбранном элементе.



Поток заряда  $dI_Q$  равен величине заряда в объеме проводника  $dQ = q \cdot n \cdot dV$ , ( $n$  – плотность электронов), умноженной на скорость переноса электронов в направлении  $d\ell$ ,

$$\begin{aligned} dI_Q &= q \cdot n \cdot v \cdot dV = q \cdot n \cdot v \cdot S \cdot d\ell \\ &= q \cdot n \cdot v \cdot S \cdot d\ell. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Здесь мы воспользовались тем, что направления скорости и перемещения электронов в проводнике совпадают, т.е.  $v d\ell = v d\ell$ . Но согласно (3.58)  $q \cdot n \cdot v \cdot S = I$ , где  $I$  — сила тока, и, таким образом, поток заряда

$$dI_Q = I \cdot d\ell. \quad (3.83)$$

Эту величину будем считать элементарным источником магнитного поля  $d\vec{H}$ . Пусть мы хотим определить величину напряженности в точке  $A$ . В силу принципа суперпозиции вектор  $\vec{H}$  является векторной суммой всех бесконечно малых напряженностей  $d\vec{H}$ , создаваемых всеми элементами  $d\ell$  проводника. Поэтому, для того чтобы найти напряженность поля, создаваемую в данной точке всем проводником, нужно сначала определить величину  $d\vec{H}$ , а затем просуммировать ее по всей длине проводника. Для каждого конкретного проводника вполне определенной формы величина  $\vec{H}$ , конечно, будет разной, но величина  $d\vec{H}$  должна быть, очевидно, одинаковой. Найдем величину  $d\vec{H}$ .

Величина  $d\vec{H}$  должна зависеть от направления, в котором точка  $A$  видна из элемента  $d\ell$ , то есть от угла между вектором  $n$  и  $e_r = r/r$  – единичным вектором в направлении точки  $A$ . Поскольку напряженность поля векторная величина, то  $d\vec{H}$  должна быть пропорциональна векторному произведению векторов  $n$  и  $e_r$ .

$$d\vec{H} \sim \vec{n} \times \vec{e}_r.$$

Последнее соображение, которое нужно учесть, состоит в том, что из-за связи между электрическим и магнитным полями последнее должно убывать с расстоянием точно так же, как кулоновское поле, т. е. обратно пропорционально квадрату расстояния:  $H \sim 1/r^2$ .

Суммируя все сказанное, мы приходим к необходимости записать выражение для напряженности поля элемента проводника в виде:

$$d\vec{H} = \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi r^2} I (d\vec{l} \times \vec{e}_r) = \frac{1}{4\pi r^3} I (d\vec{l} \times \vec{r}) \quad (3.84)$$

Как и в законе Кулона, в формулу для удобства добавлен множитель  $1/4\pi$ . Выражение (3.84) носит название закона Био-Савара-Лапласа. Из него следует, что напряженность направлена нормально к плоскости, проходящей через векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

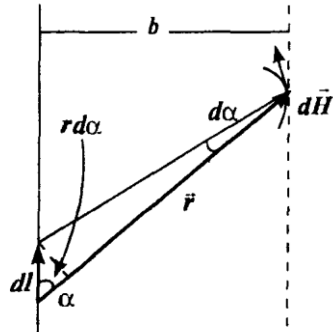
В скалярной форме закон Био-Савара-Лапласа принимает вид:

$$dH = \frac{I \cdot d\ell}{4\pi r^2} \sin \alpha, \quad (3.85)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ . Применим формулу (3.85) для вычисления напряженности поля линейного проводника бесконечной длины на расстоянии  $b$  от проводника (рис.). Перейдем в формуле (3.85) от переменной  $d\ell$  к переменной  $d\alpha$ . Из рис. следует, что

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad d\ell = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставляя это в (3.85), получим, что вклад в величину напряженности поля выбранного элемента:



$$dH = \frac{I}{4\pi r^2} \sin \alpha d\alpha .$$

Просуммировав вклады всех элементов тока от  $-\infty$  до  $+\infty$ , находим:

$$H = \frac{I}{4\pi b} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{2I}{4\pi b} . \quad (3.86)$$

Величина  $H$  одинакова для всех точек, отстоящих от проводника на расстоянии  $b$ . Таким образом, силовые линии бесконечного линейного проводника представляют собой окружности, центры которых расположены на оси проводника. Следовательно, магнитное поле линейного проводника обладает цилиндрической симметрией.

### 3.5.3. Силы в магнитном поле

#### А. Сила Лоренца

На заряд, движущийся в магнитном поле, со стороны последнего действует сила, называемая силой Лоренца. Поскольку эта сила должна быть пропорциональна заряду и скорости электрона, а с другой стороны, напряженности магнитного поля, то вектор силы следует построить, как и в законе Био-Савара, с помощью векторного произведения указанных векторов. При этом в единицах СИ вместо вектора напряженности используется вектор магнитной индукции.

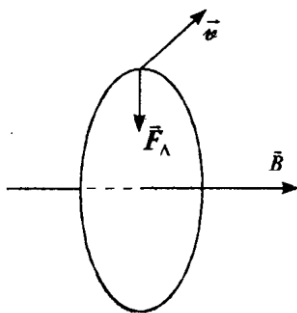
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (3.87)$$

где  $\mu_0$  — известная константа, называемая магнитной проницаемостью вакуума. В вакууме величины  $B$  и  $H$  различаются только константой, но в веществе вместо  $\mu_0$  следует принимать величину  $\mu_0 \mu$  — магнитную проницаемость вещества, которая может значительно отличаться от  $\mu_0$ . Таким образом, характеристикой истинного поля в среде является не напряженность поля  $H$ , а магнитная индукция  $B$ . Поэтому сила Лоренца должна быть записана в виде:

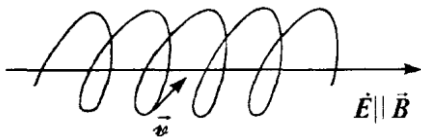


$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.88)$$

Из выражения (3.88) видно, что сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно вектору скорости заряда и поэтому изменяет только направление скорости, оставляя неизменной ее величину. По этой же причине сила Лоренца не совершает над зарядом работы. Сила Лоренца является центростремительной силой, сообщаящей заряду только нормальное ускорение. Траектория заряда в магнитном поле представляет собой окружность в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной индукции (рис.). Если наряду с магнитным полем имеется отличное от нуля электрическое, то, кроме силы Лоренца, на заряд действует сила (3.4). Суммарная сила, действующая на заряд



$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) + q\vec{E}. \quad (3.89)$$



В этом случае, кроме нормального ускорения, заряд приобретает ускорение в направлении (либо против) электрического

поля и в результате движется по винтовой линии, которая изображена на рис. для параллельно направленных полей  $E$  и  $B$ . По мере продвижения под действием электрического поля энергия и скорость частицы будут монотонно возрастать. Свойство магнитного поля удерживать заряженные частицы в определенной области пространства находит широкое применение в физике и технике для ускорения заряженных частиц, нагрева плазмы, управления пучками заряженных частиц в приборах физической электроники.

## Б. Сила Ампера

Теперь не составит труда обобщить силу Лоренца для проводника с электрическим током. Умножая силу (3.88), действующую на заряд

магнитном поле на один электрон, на число электронов в объеме проводника  $dN = ndV = nSdl$ , находим силу, действующую на элемент проводника длиной  $dl$ ,

$$d\vec{F} = qn(\vec{v} \times \vec{B})Sdl = (\vec{j} \times \vec{B})Sd\vec{\ell} \quad (3.90)$$

Пользуясь тождеством  $\vec{v}d\ell = v\vec{\ell}$  и выражая плотность тока через силу тока  $I = jS$ , полученное выражение можно записать в виде закона Ампера:

$$d\vec{F}_A = I(d\vec{\ell} \times \vec{B}). \quad (3.91)$$

В скалярной форме закон Ампера имеет вид:

$$dF_A = IBdlsin\alpha, \quad (3.92)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\ell$  и  $B$ .

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, направлена перпендикулярно направлению протекания тока и вектору магнитной индукции. В опытах Ампера

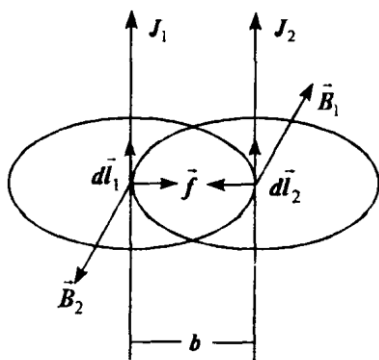
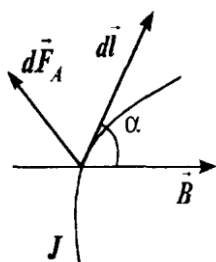
(1820г.) наблюдалось взаимное притяжение либо отталкивание

электрических токов, протекающих по параллельным проводникам.

Пользуясь законом Ампера, вычислим силу взаимодействия между двумя параллельными токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис.).

На каждый ток, согласно (3.91), действует сила, равная векторному произведению потока электронов  $dI_Q = Id\ell$  на магнитную индукцию  $B$ , создаваемую

другим током в месте протекания первого тока. Из закона Био-Савара можно видеть, что векторы  $B_1$  и  $B_2$  перпендикулярны соот-



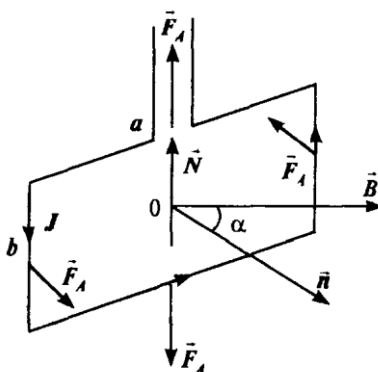
ветствующим элементам токов  $d\ell_1$ , и  $d\ell_2$ , поэтому в формуле (3.92)  $\alpha = \pi/2$ . Отсюда, пользуясь формулой (3.86) для напряженности поля бесконечного линейного тока, находим, что на единицу длины проводников действует сила

$$f_A = \frac{dF_A}{d\ell} = I_1 B_2 = I_2 B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b} \quad (3.93)$$

При параллельной ориентации токов сила  $f_A$  есть сила притяжения, при антипараллельной — сила отталкивания.

## В. Силы, действующие на замкнутый контур с током в однородном магнитном поле. Магнитный момент тока

Рассмотрим замкнутый проводящий контур, по которому течет ток  $I$ , помещенный в однородное магнитное поле  $B$ . Поле  $B$ , в зависимости от его ориентации по отношению к контуру, по-разному воздействует на контур. Для простоты рассмотрим плоский контур в виде рамки, изображенной на рис. Результаты, однако, будут справедливы и для контура произвольной формы.



Силы Ампера, действующие на разные участки контура, будут согласно формуле (3.91) перпендикулярны одновременно и направлению вектора, и сторонам рамки. При этом на стороны  $a$  рамки будут действовать силы в плоскости рамки, стремящиеся сжать либо растянуть рамку (в зависимости от направления протекания тока). На стороны же  $b$  будут действовать противоположные силы под углом  $\alpha$  к плоскости рамки, которые будут стремиться привести ее во вращение. Эти последние две силы образуют пару сил, которая создает вращательный момент рамки.

Плечо силы  $F_A$ , действующей на каждую из сторон  $b$ , равно

$(a \cdot \sin \alpha)/2$ , сила  $F_A = I \cdot b \cdot B$ , следовательно, полный момент пары сил равен

$$N = I \cdot a \cdot b \cdot B \cdot \sin \alpha = I \cdot S \cdot B \cdot \sin \alpha, \quad (3.94)$$

где  $S = a \cdot b$  — площадь рамки.

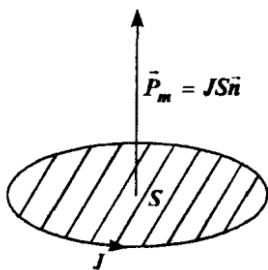
Из рис. видно, что момент  $N$  направлен вдоль оси вращения.

Поэтому выражение для момента можно записать в векторной форме:

$$\vec{N} = IS (\vec{n} \times \vec{B}). \quad (3.95)$$

Таким образом, однородное магнитное поле создает вектор момента сил, направленный перпендикулярно вектору  $B$  и нормали к плоскости контура. Как видно, из полученного выражения, момент силы не зависит от координат выбранной точки, а определяется только площадью контура.

Величина  $\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n} \quad (3.96)$



называется магнитным моментом тока, протекающего по контуру. Направление  $p_m$  совпадает с направлением нормали к контуру. Таким образом, всякий ток, протекающий по замкнутому контуру, можно характеризовать вектором магнитного момента (рис.).

В терминах магнитного момента вращательный момент контура можно записать в виде:

$$\vec{N} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (3.97)$$

Из (3.97) видно, что составляющая магнитной индукции  $B_n$  нормальная к плоскости контура, не вносит вклад во вращательный момент,  $\vec{p}_m \times \vec{B}_n = 0$ .

Магнитный момент контура с электрическим током играет такую же роль по отношению к внешнему магнитному полю, что и электрический дипольный момент по отношению к электрическому полю (см. (3.43)).

В самом деле, согласно механике, работа, которую необходимо

совершить для поворота контура на угол  $d\alpha$

$$dA = Nda = p_m \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha. \quad (3.98)$$

Эта работа затрачивается на изменение положения контура в пространстве, то есть изменяет потенциальную энергию контура  $dA = dU$ . При повороте контура на конечный угол потенциальная энергия изменяется на величину

$$U = \int dU = \int_0^\alpha p_m \cdot B \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = -p_m B \cos\alpha + U_0. \quad (3.99)$$

Выбрав величину  $U_0$  за начало отсчета, получим, что потенциальная энергия контура с током во внешнем поле имеет вид:

$$U = -p_m \cdot B \cdot \cos\alpha = -\vec{p}_m \vec{B}. \quad (3.100)$$

Как и для электрических диполей в электрическом поле, выражение (3.100) принимает наименьшее значение при ориентации магнитного момента параллельно вектору магнитной индукции. Таким образом, магнитное поле заставляет контур с электрическим током поворачиваться до тех пор, пока направление нормали к плоскости контура не совпадет с направлением  $B$ .

### 3.5.4. Магнитное поле в веществе. Магнетики

Магнитное поле, в отличие от электрического, свободно проникает в любую среду, за исключением веществ, обладающих практически бесконечной проводимостью. Такие вещества – сверхпроводники – реализуются в особых условиях, и здесь мы не будем их изучать.

Рассмотрим характер проникновения магнитного поля в различные среды. Как уже говорилось в начале этой главы, магнитные свойства вещества обусловлены существованием магнитных моментов элементарных токов, связанных с различным типом упорядоченного движения заряженных частиц в веществе. Внешнее магнитное поле стремится ориентировать эти магнитные моменты в одном направлении: возникает результирующий магнитный момент, изменяющий величину напряженности магнитного поля в среде.

По своим магнитным свойствам все вещества могут быть разделены на три класса — диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Указанными магнитными свойствами могут обладать как проводники, так и диэлектрики. Результирующий магнитный момент магнетика, возникающий при помещении его в магнитное поле, можно записать в виде:

$$\vec{M} = \chi \vec{H}, \quad (3.101)$$

где  $\chi$  — так называемая магнитная восприимчивость вещества. В магнитной среде в отличие от вакуума (ср. (3.87)):

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}). \quad (3.102)$$

Подставляя сюда (3.101), получим:

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (3.103)$$

где  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость среды. Магнитная проницаемость — положительная величина, которая может быть как больше, так и меньше единицы, то есть магнитное поле в среде может быть как больше, так и меньше поля в вакууме.

Диамагнитные и парамагнитные вещества обладают весьма малым магнитным моментом, возникающим только при помещении их во внешнее магнитное поле. В этом смысле они похожи на диэлектрики — результирующая намагниченность  $M$  индуцируется внешним магнитным полем. В парамагнетиках атомы вещества обладают собственным, не равным нулю, магнитным моментом, связанным с внутренними степенями свободы зарядов, образующих структуру атомов. Внешнее поле ориентирует моменты отдельных атомов по полю, что и обуславливает возникновение индуцированного момента. Величина  $\chi$  в парамагнетиках положительна, но мала, и в формуле (3.103)  $\mu$  мало отличается от единицы.

В диамагнитных веществах при отсутствии внешнего поля атомы не обладают собственным моментом. Магнитный момент, возникающий вследствие движения зарядов по орбитам в атоме вокруг ядра, скомпенсирован вследствие неупорядоченного расположения электронных орбит. Во внешнем магнитном поле, благодаря действию силы Лоренца, происходит своего рода «магнитная

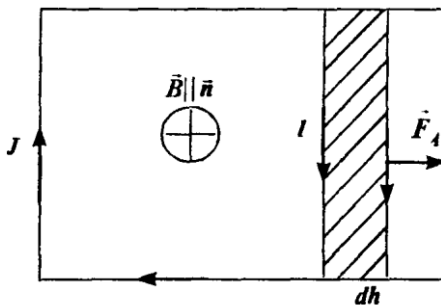
поляризация» атомов вещества, в результате которой атомы приобретают магнитный момент. Однако магнитный момент диамагнитных веществ ориентируется не по полю, а против него, в результате чего суммарное поле в среде уменьшается. Таким образом, в диамагнетиках  $\chi < 0$ , соответственно  $\mu < 1$ , при этом величина  $\mu$  незначительно отличается от единицы.

Ферромагнетики замечательны тем, что в них из-за сильного взаимодействия соседних электронных оболочек атомов собственные магнитные моменты атомов оказываются строго упорядоченными даже при отсутствии внешнего магнитного поля. Поэтому ферромагнитные вещества обладают значительной результирующей намагниченностью, которая может проявляться в существовании собственных магнитных полей в окружающем пространстве. При нагревании ферромагнетиков выше некоторой температуры, называемой критической, происходит магнитное разупорядочение вещества, и ферромагнетики переходят в парамагнитное состояние.

Типичными парамагнетиками являются кислород, алюминий, натрий. Диамагнитными свойствами обладают серебро и медь. Ферромагнитные свойства присущи железу, никелю и кобальту.

### 3.5.5. Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля. Поле соленоида

Вычислим работу, совершаемую силами магнитного поля при перемещении контура с током. Пусть однородное магнитное поле перпендикулярно плоскости контура (рис.), а незакрепленный отрезок контура длины  $\ell$  имеет возможность свободно скользить в плоскости контура.



Сила, действующая на указанный отрезок,  $F = I \cdot B \cdot \ell$ .

При перемещении отрезка на расстояние  $dh$  эта сила совершает работу:

$$dA = F \cdot dh = I \cdot B \cdot \ell \cdot dh = I \cdot B \cdot dS, \quad (3.104)$$

где  $dS$  — заштрихованная площадь. Величина

$$d\Phi = B \cdot dS \cdot \cos \alpha = \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS, \quad (3.105)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением векторов  $B$  и  $n$  называется потоком вектора магнитной индукции через элемент поверхности  $dS$  (ср. с (3.6)) или просто магнитным потоком.

Учитывая, что в геометрии (рис.)  $B \parallel n$ , формулу (3.104) можно записать в виде:

$$dA = I \cdot B \cdot dS = I \cdot d\Phi. \quad (3.106)$$

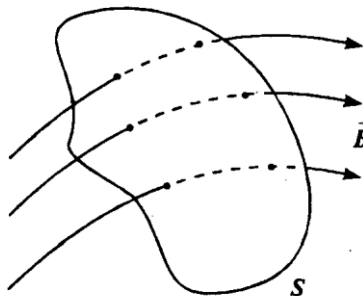
Работа, совершаемая при перемещении контура на конечное расстояние,

$$A = I \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = I (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (3.107)$$

Таким образом, механическая работа, совершаемая магнитным полем над током  $I$ , определяется разностью магнитных потоков в конечном и начальном положениях контура. Понятие магнитного потока, как и понятие потока вектора электрической индукции, имеет важное значение в теории электромагнетизма. Для величины магнитного потока через замкнутую поверхность справедливо следующее утверждение:

$L$

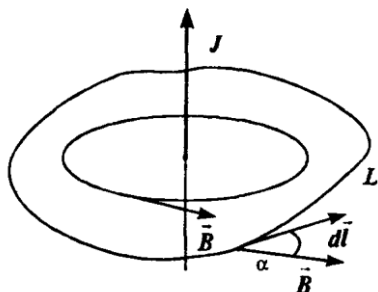
$$\Phi = \oint_S \vec{B} \vec{n} dS = 0. \quad (3.108)$$



(Здесь знак  $\int$  означает интегрирование по всей замкнутой поверхности. Аналогичное обозначение употребляется и для интегрирования по замкнутому объему  $\int_V dV$  и для обхода по замкнутому линейному контуру  $\int_L d\vec{\ell}$ .)



Это вполне очевидное утверждение следует из того, что общее число силовых линий, входящих в замкнутый поверхность объем (со знаком «плюс»), равно числу выходящих (со знаком «минус») (рис.).



Сравнивая с теоремой Гаусса для электрического поля (3.21), можно видеть, что формула (3.108) выражает собой факт отсутствия магнитных зарядов. Рассмотрим линейный интеграл

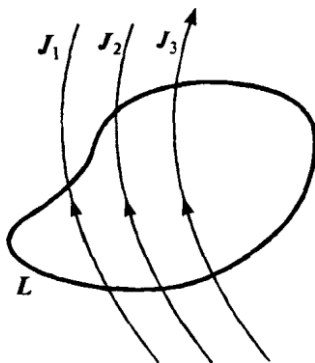
$$\oint_L \vec{B} d\vec{\ell} = \oint_L B d\ell \cos \alpha, \text{ взятый вдоль контура } L, \text{ охватывающего}$$

линейный ток (рис.). Под знаком интеграла стоит  $B \cos \alpha$  — проекция вектора  $B$  в данной точке контура на направление касательной к контуру в этой же точке. Такой интеграл называется циркуляцией вектора  $B$  по контуру  $L$ . Вычислим этот интеграл для линейного тока и в качестве контура возьмем силовую линию магнитного поля, которая в этом случае является окружностью. Согласно (3.86)  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ , где  $R$  — радиус окружности силовой

линии. Кроме того,  $\alpha = 0$ , поэтому

$$\oint_L \vec{B} d\vec{\ell} = \oint_L B d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I.$$

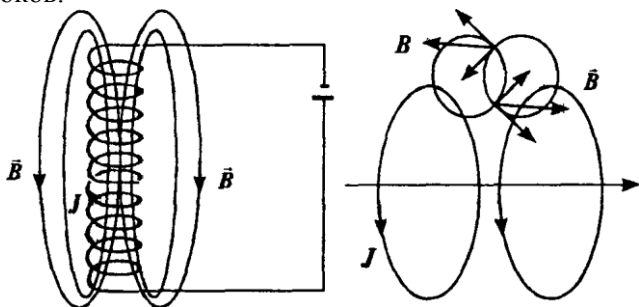
Можно убедиться, что справедливо и более общее утверждение, относящееся к произвольному контуру интегрирования, охватывающему несколько токов, протекающих по проводникам любой формы (рис.)



$$\oint_L \vec{B} d\vec{\ell} = \mu \sum_n I_n.$$

(3.109)

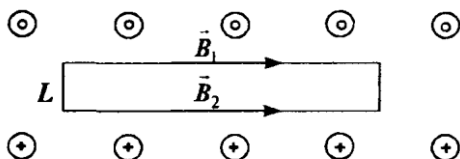
Формула (3.109) — так называемая теорема о циркуляции вектора — позволяет вычислить магнитное поле сложной конфигурации токов.



Вычислим с помощью этой теоремы поле тока, текущего по соленоиду — проводнику, имеющему форму спирали (рис.а). Соленоид для магнитного поля играет в теории электромагнитных явлений такую же роль, что и конденсатор для электрического поля. Магнитное поле соленоида имеет вид, изображенный на рис.а. Оно сосредоточено в основном внутри катушки и в малой окрестности катушки вне ее. Вдали от катушки поле  $B$  отсутствует. Таким образом, соленоид является своеобразным накопителем энергии магнитного поля так же, как конденсатор — накопителем энергии электрического поля. В самом деле, рассмотрим результирующее поле, создаваемое парой соседних витков тока (рис., б). Видно, что результирующее поле параллельно оси соленоида.

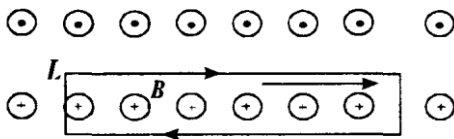
Для вычисления величины  $B$  внутри соленоида обратимся к теореме о циркуляции (3.109). Прежде всего убедимся, что поле внутри соленоида является однородным. Для этого вычислим циркуляцию по контуру внутри соленоида, изображенному на рис. Вклад от вертикальных участков контура, вдоль которых  $Bdl = 0$ , равен нулю. Интегрирование вдоль горизонтальных участков дает в силу (3.109)  $(B_1 - B_2)l = 0$ , поскольку внутри контура не содержится токов. Отсюда  $B_1 = B_2$ , то есть внутри соленоида поле является однородным.

Поле вне соленоида оказывается равным нулю. В самом деле, возьмем



бесконечную плоскость, перпендикулярную оси соленоида, и считаем поток через нее вектора индукции  $B$ , создаваемый соленоидом во всем пространстве. Магнитный поток, согласно определению (3.105), равен сумме числа силовых линий поля в направлении нормали к плоскости (со знаком «плюс»), умноженной на пересекаемую ими площадь сечения соленоида, и числа силовых линий, идущих в обратном направлении, вне соленоида (со знаком «минус») — на остальную площадь. Поскольку силовые линии магнитного поля — замкнутые кривые, эти потоки равны друг другу:  $BS = B'S'$ . Но  $\Phi = BS$  — магнитный поток внутри соленоида — вполне определенная конечная величина. Так как площадь  $S'$  бесконечна, это означает, что должно быть  $B = 0$ .

Наконец, саму величину  $B$  можно найти, рассмотрев циркуляцию по контуру, охватывающему токи в витках соленоида (рис.). Согласно (3.109) эта циркуляция  $B\ell = \mu_0 N I$ , где  $I$  — сила тока в каждом витке;  $N$  — число витков, охватываемых контуром длины  $\ell$ . На длине  $\ell$  помещается  $n\ell$  витков, где  $n$  — плотность витков. Таким образом, получаем для магнитного поля внутри соленоида



$$B = \mu_0 n I. \quad (3.110)$$

Выражение (3.110) формально получено для бесконечно длинного соленоида, но им можно пользоваться и для соленоида конечных размеров при условии, что длина соленоида много больше его диаметра.

### 3.5.6. Электромагнитная индукция

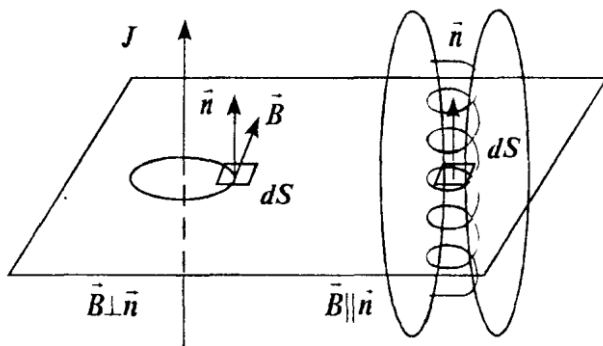
В 1831 г. английский физик Майкл Фарадей обнаружил на опыте, что в замкнутом проводнике при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную контуром проводника, возникает электрический ток. Это явление называют электромагнитной индукцией. В опыте Фарадея проводник играет роль при-

бора, регистрирующего возникновение электродвижущей силы  $\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l}$ , где  $L$  — контур, ограничивающий поверхность, которую пересекает изменяющийся магнитный поток. Закон электромагнитной индукции Фарадея связывает величину ЭДС  $\varepsilon$  с изменением магнитного потока

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.111).$$

Магнитный поток может изменяться за счет изменения площади поверхности, пересекаемой линиями  $B$ , угла между нормалью к элементу поверхности и направлением  $B$  и самой величины  $B$ .

Важным проявлением электромагнитной индукции является самоиндукция проводников. Всякий контур, по которому протекает электрический ток, создает магнитный поток через поверхность, ограниченную этим контуром. При изменении магнитного потока в контуре возникает разность потенциалов, называемая ЭДС самоиндукции.



Магнитный поток, создаваемый проводником, зависит не только от силы протекающего тока, но и от формы проводника. На рис. изображены поля, создаваемые одним и тем же проводником, но в первом случае контур проводника имеет форму линейного провода, а во втором — катушки соленоида. Для линейного проводника создаваемый им магнитный поток на единицу поверхности горизонтальной плоскости равен нулю ( $B \perp n$ ), для соленоида

$$\frac{d\Phi}{dS} = B \quad (B \parallel n).$$

Способность проводящего контура создавать магнитный поток при протекании по нему электрического тока называют индуктивностью

$$\Phi = LI, \quad (3.112)$$

где  $\Phi$  — полный магнитный поток, создаваемый контуром.

Например, полный магнитный поток, создаваемый соленоидом длины  $\ell$ , имеющим  $N$  витков,

$$\Phi = N \cdot \phi = N \cdot B \cdot S = \mu_0 \cdot n^2 \cdot \ell \cdot S \cdot I \quad (3.113)$$

(здесь  $\phi$  — магнитный поток, создаваемый одним витком тока). Сравнивая с (3.116), для индуктивности соленоида находим:

$$L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot \ell \cdot S = \mu_0 \cdot n^2 \cdot V, \quad (3.114)$$

где  $V$  — объем соленоида. Таким образом, индуктивность соленоида определяется его геометрическими характеристиками — объемом и плотностью витков.

Индуктивность в магнитостатике играет такую же роль, как емкость в электростатике. За единицу индуктивности принимают индуктивность такого проводника, который при пропускании по нему тока в 1 А создает единицу магнитного потока.

Подставляя выражение (3.116) в (3.115), для ЭДС самоиндукции получим:

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} \quad (3.115)$$

### 3.5.7. Энергия магнитного поля

В электростатике, вычисляя энергию электрического поля в объеме, где сосредоточены заряды, мы видели, что энергия поля может быть выражена как в терминах создающего его заряда, так и непосредственно напряженности поля или разности потенциалов, существующих в этом объеме.

Аналогичным образом энергию магнитного поля можно выразить через величину тока, создающего это поле, либо через вели-

чину магнитной индукции.

Рассмотрим магнитостатическую систему — совокупность электрических проводников, по которым протекают постоянные токи. Эти токи взаимодействуют между собой посредством магнитного поля, что проявляется в существовании сил Ампера.

Такая система токов вполне аналогична электростатической системе зарядов, рассмотренных в разделе 3.2.3. Напомним в связи с этим, что роль элементарного «магнитного заряда» выполняет величина бесконечно малого потока заряда (см. раздел 3.3.2.)

$$dI_Q = Id\ell.$$

Энергия системы токов заключена в энергии их взаимодействия между собой. Эта энергия взаимодействия возникает как результат совершения работы над токами внешними силами против магнитного поля токов при создании магнитостатической системы. Для создания самого магнитного поля тока никакой дополнительной работы производить не нужно — магнитное поле существует вместе с постоянным током точно так же, как электрическое поле существует вместе с покоящимся зарядом.

При перемещении токов под действием сил Ампера, наоборот, магнитное поле совершает работу над токами. Мы вычислили эту работу в разделе 3.35:

$$dA = I \cdot d\Phi,$$

где  $d\Phi$  — изменение магнитного потока при перемещении тока. Используя соотношение (3.116), находим

$$dA = \ell \cdot I \cdot dI,$$

откуда полная работа:

$$A = \frac{L \cdot I^2}{2}. \quad (3.116)$$

Таким образом, энергия магнитного поля, создаваемого в пространстве проводником, по которому протекает ток  $I$ ,

$$W = \frac{L \cdot I^2}{2}. \quad (3.117)$$

Выразим эту энергию через величину магнитной индукции. Сделаем это с помощью формул для соленоида. Используя форму-

лы для индуктивности и магнитного поля соленоида (3.118) и (3.110), получим:

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 V = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V. \quad (3.118)$$

Соответственно плотность энергии магнитного поля:

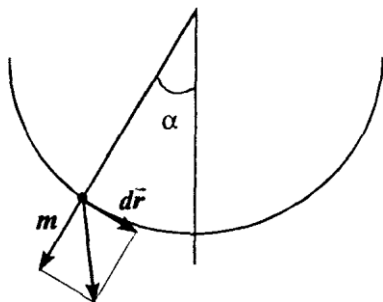
$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (3.119)$$

## IV. Колебания и волны

### 4.1. Механические колебания

#### 4.1.1. Гармонические колебания. Осциллятор

В природе часто встречается периодическая зависимость от времени различных физических величин. Периодически изменяются со временем температура и освещенность при вращении Земли, периодическое движение совершают маятник часов и колеблющийся грузик на пружине. Периодическим называют процесс, при котором физическая величина принимает одинаковые значения через равные промежутки времени. Такие характерные промежутки времени называют периодом процесса.



При движении точки с постоянной скоростью по окружности период равен времени полного оборота. При колебаниях периодом является время, в течение которого совершается полное колебание. Вычислим период колебаний математического маятника —

материальной точки, характеризуемой массой  $m$  и подвешенной на невесомой нити длиной  $\ell$  (рис.).

При свободном движении маятника в поле силы тяжести остается постоянной полная энергия маятника — сумма кинетической и потенциальной энергий  $E = T + U$ . Следовательно, при бесконечно малом перемещении маятника вдоль траектории изменение полной энергии должно быть равно нулю.

Изменение потенциальной энергии маятника при его перемещении на расстояние  $dr$  можно вычислить как работу силы тяжести на пути  $dr$ . При этом работу совершает лишь составляющая силы тяжести вдоль направления движения. Составляющая силы тяжести, нормальная к направлению движения, работу не совершает. Таким образом,  $dU = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot dr$ .

Изменение полной энергии:

$$dE = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) + mg \sin \alpha \cdot dr = 0$$

Произведя дифференцирование и разделив это уравнение сначала на  $dt$ , а затем на величину  $mv = mdr/dt$ , получим уравнение движения маятника в виде:

$$\frac{dv}{dt} + g \sin \alpha = 0. \quad (4.1)$$

Удобно перейти к переменной  $\alpha$ , пользуясь соотношением  $dr = \ell d\alpha$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin \alpha = 0. \quad (4.2)$$

Это уравнение довольно сложное, несмотря на свой простой вид. Его можно упростить в случае малых колебаний, когда величина угла колебаний маятника, измеряемая в радианах, мала по сравнению с единицей,  $\alpha \ll 1$ . В этом случае можно заменить  $\sin \alpha \sim \alpha$ , и уравнение движения принимает вид:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \alpha = 0. \quad (4.3)$$



Решением уравнения (4.3) является функция (в чем можно убедиться при прямой подстановке)

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.4)$$

где  $\alpha_0$  — максимальный угол отклонения маятника, являющийся амплитудой колебаний;  $\omega$  — угловая частота колебаний, связанная с периодом колебаний соотношением  $\omega = 2\pi/T$ ;  $\varphi_0$  — начальная фаза колебания — величина, характеризующая угол отклонения маятника ( $\alpha_0 \cos \varphi_0$ ) в начальный момент его движения ( $t = 0$ ).

Подставляя выражение (4.4) в уравнение (4.3), найдем, что последнее выполняется при значении угловой частоты:

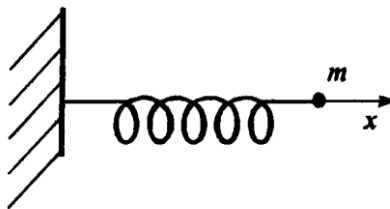
$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (4.5)$$

называемой собственной частотой колебаний маятника. Таким образом, период колебаний маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (4.6)$$

Обратим внимание на то, что период собственных колебаний не зависит ни от амплитуды колебаний маятника, ни от величины колеблющейся массы.

Рассмотрим другой пример малых колебаний вблизи положения равновесия — колебания массы под действием упругой силы (рис.). Если на конце пружины закреплена масса  $m$  и пружина характеризуется жесткостью  $k$ , то при смещении массы на расстояние  $x$  возникает возвращающая упругая сила  $F = -kx$ . Уравнение колебаний массы в этом случае имеет вид:



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad (4.7)$$

аналогичный уравнению (5.3):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0. \quad (4.8)$$

Собственной частотой колебаний массы на пружине является величина:

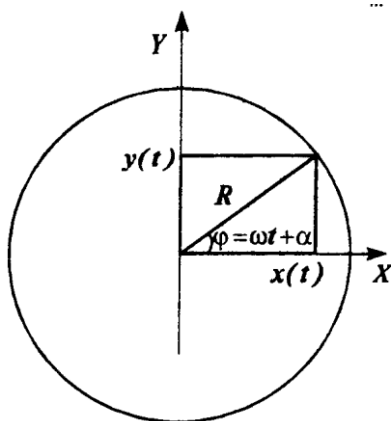
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (4.9)$$

а зависимость смещения массы от времени определяется выражением, аналогичным выражению (4.4):

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0). \quad (4.10)$$

...

Таковыми же уравнениями колебательного движения описывается равномерное вращение точки по окружности постоянного радиуса. Колебания при этом испытывают координаты точки  $x(t)$  и  $y(t)$  (рис.):



$$x(t) = R \cos(\omega t + \alpha), \quad (4.11)$$

$$y(t) = R \sin(\omega t + \alpha) =$$

$$R \cos(\omega t + \alpha - \pi/2),$$

где угловая частота  $\omega = v/R$  определяется постоянной скоростью вращения  $v$ . Видно, что координата  $y$  определяется той же

периодической зависимостью от времени, что и координата  $x$ , но только сдвинутой относительно последней на  $\pi/2$ .

Все рассмотренные выше примеры имеют общее свойство — во всех случаях движение может быть описано с помощью всего лишь одной периодически изменяющейся со временем величины. В случае маятника такой величиной является угол отклонения  $\alpha(t)$ , в случае массы на пружине — величина смещения  $x(t)$ , в случае движения точки по окружности — одна из координат  $x(t)$  или  $y(t)$  (другая может быть выражена через первую с помощью уравнения окружности). В механике о таких движениях говорят как о движениях с одной степенью свободы или одномерных движениях. Та-

ким образом, при одномерном периодическом движении координата, соответствующая определенной степени свободы системы, испытывает колебания.

Материальную точку, совершающую колебания, называют осциллятором (от английского слова *oscillation* — колебание). Колебание, которое происходит по закону  $\cos(\omega t)$  и характеризуется единственной частотой  $\omega$ , называют гармоническим (поскольку гармоническое звуковое колебание соответствует одному тону).

Таким образом, рассмотренные выше колебания представляют собой частные случаи свободных колебаний гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.12)$$

решение которого будем записывать в виде:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.13)$$

здесь  $A$  — амплитуда колебаний;  $\omega_0$  — собственная частота; величина  $\omega_0 t + \alpha$  — фаза колебания.

Удобство использования представления о гармоническом осцилляторе связано с тем, что сложные колебания системы со многими степенями свободы можно представить в виде набора колебаний отдельных гармонических осцилляторов, соответствующих различным степеням свободы.

Определим энергию гармонического осциллятора. Энергия колебания представляет собой полную энергию механического движения, выраженную через частоту и амплитуду колебания. Координата и скорость частицы, совершающей колебания,  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ ,  $v = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ , поэтому кинетическая и потенциальная энергия осциллятора примут вид:

$$T = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha); \quad U = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha).$$

Выразим постоянную  $k$  с помощью соотношения:

$$k = m \omega_0^2.$$

Полная энергия осциллятора

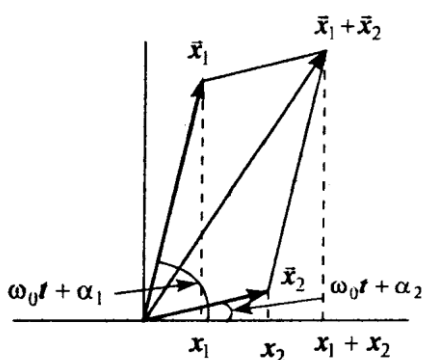
$$E = T + U = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2. \quad (4.14)$$

Таким образом, энергия колебаний пропорциональна квадрату собственной частоты и квадрату амплитуды колебаний. Обратим внимание на сходство этого выражения с энергией вращения материальной точки вокруг некоторой оси:  $T = J\omega^2/2$ , где  $J$  – момент инерции точки. Роль момента инерции играет величина  $mA^2$ .

#### 4.1.2. Сложение колебаний

Колебания могут складываться и при этом усиливать или гасить друг друга, или изменять траекторию движения тела. Рассмотрим сложение колебаний, совершаемых в одном направлении. Пусть осциллятор совершает два одновременных колебания в одном направлении и одинаковой частоты  $\omega_0$ :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) \text{ и } x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2).$$



При этом суммарное колебание координаты  $x(t)$  равно  $x = x_1 + x_2$ . Представим колебания  $x_1$  и  $x_2$  в виде векторов на плоскости (рис.), модулями которых являются амплитуды колебаний, а фазы колебаний будут служить углами наклона векторов к оси  $x$ . При изменении времени векторы  $x_1$  и  $x_2$  будут равномерно вращаться в плоско-

сти рисунка, однако разность фаз между колебаниями остается неизменной. Из рисунка видно, что вектор  $x = x_1 + x_2$ , представляет собой сумму колебаний  $x_1$  и  $x_2$ . В самом деле, проекции векторов  $x_1$ , и  $x_2$ , на ось  $x$  соответственно равны  $A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1)$  и  $A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2)$ , а проекция вектора  $x$  равна сумме этих проекций. Результирующее колебание также можно записать в виде:

$x(t) = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ . Частота результирующего колебания равна частоте складываемых колебаний, т. е. результирующее ко-

лебание также гармоническое. Амплитуду результирующего колебания нетрудно найти из рис.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (4.15)$$

а новую начальную фазу определить так:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (4.16)$$

Из формулы (4.15) следует, что амплитуда результирующего колебания существенно зависит от значения разности фаз начальных колебаний. Если разность фаз  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ , колебания находятся в фазе, и амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  складываются  $A = A_1 + A_2$ . Если же разность фаз равна  $\pm\pi$ , колебания находятся в противофазе, т.е. амплитуда результирующего колебания  $A = |A_1 - A_2|$ .

Выше было рассмотрено сложение двух колебаний с одинаковой частотой, при этом результирующее колебание осталось гармоническим с той же частотой. Если складываются колебания разной частоты, то векторы  $x_1$  и  $x_2$  в плоскости будут вращаться с разной скоростью (рис.). Тогда результирующий вектор в процессе вращения будет изменяться по величине и описывать сложное негармоническое колебание.

Рассмотрим сложение колебаний во взаимно перпендикулярных направлениях. Наиболее простым примером такого колебания являются одновременные колебания частицы в направлениях  $x$  и  $y$ , происходящие с одинаковыми частотами и амплитудами (см. формулы (4.11)). Как было установлено, результирующее движение представляет собой равномерное вращение в плоскости по окружности с радиусом, равным амплитудам колебаний величин  $x$  и  $y$ . В случае неравных амплитуд и частот элементарных колебаний результирующее движение может происходить по весьма сложным траекториям и не будет гармоническим.

Таким образом, сложение гармонических колебаний с различными частотами и амплитудами позволяет осуществить колебание произвольной формы. Это обстоятельство используется для создания негармонических колебаний необходимой формы. Отсюда следует и обратное утверждение: всякое сложное негармоническое колебание может быть представлено в виде суммы простых гармо-

нических колебаний. Другими словами, движение сложной колебательной системы со многими степенями свободы можно описать, рассматривая соответствующий набор гармонических осцилляторов.

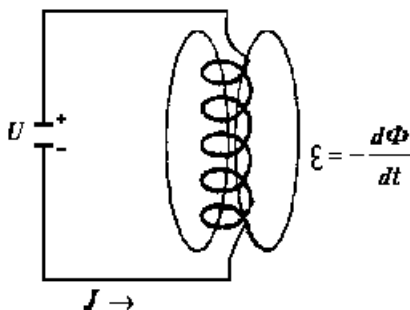
Свободные механические колебания могут существовать в системах, где сохраняется полная механическая энергия. В реальных системах всегда присутствует трение, благодаря которому свободные колебания, возбужденные первоначально в системе, со временем будут затухать. Кроме того, колебания в различных системах часто происходят под действием внешней силы — так называемой вынуждающей силы. Колебания при наличии сил трения являются затухающими, а под действием внешней силы — вынужденными. Эти явления будут рассмотрены на примере электрических колебаний.

## 4.2. Электрические колебания

### 4.2.1. Свободные колебания в электрическом контуре

В электрических цепях, как и в механических системах, могут существовать колебания электрических величин — заряда, силы тока и связанных с ними электрических и магнитных полей. Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из конденсатора с емкостью  $C$  и катушки соленоида с индуктивностью  $L$  (рис.). Такую замкнутую цепь называют колебательным контуром.

Пусть с помощью внешнего источника ЭДС был заряжен конденсатор, после чего его замкнули на катушку. Тогда в цепи (рис.) возникает электрический ток, обусловленный разрядом конденсатора. По мере разряда конденсатора будет увеличиваться ток, протекающий через катушку индуктивности. Этот процесс будет



происходить до тех пор, пока заряд на пластинках конденсатора не станет равным нулю. Одновременно идет обратный процесс – при увеличении тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции, заставляя заряды течь в обратном направлении. В результате наблюдается бесконечно продолжающийся процесс перезарядки конденсатора, т.е. свободные колебания заряда и тока в контуре.

С точки зрения сохранения энергии этот процесс представляет собой периодическое преобразование электростатической энергии, накопленной в заряженном конденсаторе, в энергию магнитного поля, накапливаемую в катушке индуктивности при протекании электрического тока. Этот процесс полностью аналогичен преобразованию потенциальной энергии в кинетическую и наоборот при механических колебаниях (например, массы на пружине). Запишем полную энергию зарядов и токов в цепи, состоящую из суммы энергий электрического поля в конденсаторе и магнитного поля в катушке. Полная энергия

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}, \quad (4.17)$$

где  $Q$ ,  $C$  – заряд и емкость конденсатора;  $I$ ,  $L$  — сила тока и индуктивность катушки.

Если считать заряд  $Q$  координатой,  $I = dQ/dt$  – скоростью частицы, то индуктивность  $L$  играет роль массы, а емкость  $C$  — величины, обратной жесткости пружины. Тогда уравнение для энергии принимает вид:

$$W = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Видно, что аналогия между двумя видами колебаний является совершенно полной.

При отсутствии внешних воздействий полная энергия сохраняется. Приравнивая нулю приращение энергии (4.17), находим:

$$dW = \frac{Q}{C} dQ + LI dI = 0.$$

Разделив это выражение на  $dt$ , сократив на  $I$  и выразив  $I = dQ/dt$  получим уравнение для колебаний заряда в конденсаторе:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (4.18)$$

Решение этого уравнения имеет вид, аналогичный формуле (4.13),

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.19)$$

где теперь собственная частота колебаний в контуре:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.20)$$

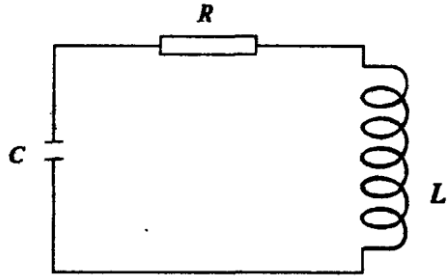
В реальных проводниках энергия электрических колебаний не остается постоянной величиной. При протекании тока в проводнике электроны, сталкиваясь с кристаллической решеткой металла, передают ей часть своей кинетической энергии. Последняя превращается в тепло – энергию хаотических колебаний ионов кристаллической решетки вблизи своих положений равновесия. Этот механизм является причиной активного, или омического, сопротивления, которое фигурирует в законе Ома.

Рассмотрим, как влияет активное сопротивление проводника на свободные колебания в электрическом контуре.

Удобно представить сопротивление контура в виде

сосредоточенного элемента  $R$  (рис). Из сказанного следует, что сопротивление при протекании электрического тока играет такую же роль, что и трение в механике. Поэтому при учете сопротивления полная энергия зарядов при колебаниях в контуре уже не будет сохраняться. Ее изменение в процессе колебаний будет равно количеству тепла, передаваемого проводнику. Это количество тепла можно вычислить как работу силы трения при перемещении заряда, взятую со знаком минус (работа силы трения отрицательна).

Как известно из механики, сила трения частицы в газе пропорциональна скорости частицы, следовательно, указанная работа





$$dA = F_{mp} dx = -rv dx = -rv \frac{dx}{dt} = -rv^2 dt,$$

где  $r$  — коэффициент трения. При электрических колебаниях роль координаты играет величина заряда, а скорости частицы — сила тока. Поэтому работа силы трения при колебаниях в электрическом контуре:

$$dA = -RI dQ = -R I^2 dt. \quad (4.21)$$

Это выражение соответствует закону Джоуля-Ленца:

$$dW = I^2 R dt.$$

Таким образом, изменение энергии электрических колебаний в контуре с сопротивлением:

$$d \left( \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} \right) = -R I^2 dt;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} \right) = \frac{Q}{C} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = -R \frac{dQ}{dt} \quad (4.22)$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q + \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt} = 0.$$

Из этого уравнения следует, что учет сопротивления привносит в  $dQ$  уравнение свободных колебаний (4.18) слагаемое с производной  $dQ/dt$ .

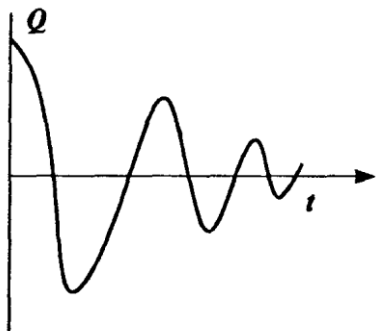
Решением данного уравнения является следующая функция:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \gamma = \frac{R}{2L}, \quad (4.23)$$

в чем можно убедиться прямой ее подстановкой в уравнение (4.22).

Решение уравнения (4.23) описывает затухающие свободные колебания в электрическом контуре. В самом деле, функция (4.23) наряду с множителем  $\cos(\omega_0 t + \alpha)$ , описывающим гармонические колебания с частотой  $\omega$ , содержит в виде сомножителя убывающую со временем экспоненту. Этот множитель описывает постепенное уменьшение заряда на конденсаторе вследствие потерь энергии колебаний за счет сопротивления контура.

Изменение величины заряда со временем изображено на рис.



Теперь частота гармонических колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (4.24)$$

т. е. уменьшается по сравнению с колебаниями в контуре без

сопротивления. Если  $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ ,

колебания в контуре вообще не возникают — процесс разрядки конденсатора является аperiodическим.

Величина  $\gamma$  описывает затухание колебаний со временем. Она обратно пропорциональна времени  $t_3$ , в течение которого амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз. В самом деле, пусть  $Q_0 e^{-\gamma t} = Q_0/e$ , откуда  $\gamma = 1/t_3$ . Отношение  $t^3/T$  ( $T$  — период колебаний) определяет число  $N$  происходящих в контуре за время  $t_3$  колебаний. Колебательный контур обычно характеризуют логарифмическим декрементом затухания  $\lambda$ , который обратен величине  $N$ :

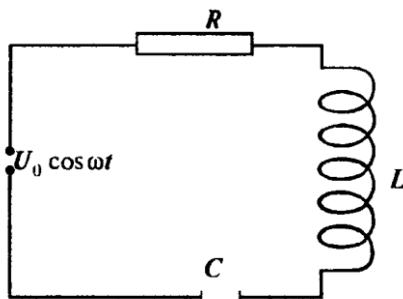
$$\lambda = \gamma T = 1/N. \quad (4.25)$$

#### 4.2.2. Вынужденные колебания. Резонанс

Пусть к цепи контура приложено внешнее периодическое напряжение частоты  $\omega$  (рис.).

$$U(t) = U_0 \cos \omega t. \quad (4.26)$$

Тогда в цепи возникнут вынужденные колебания с той же частотой. Уравнение колебаний (4.22) при наличии внешнего напряжения примет вид:



$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI = U_0 \cos \omega t. \quad (4.27)$$

решение этого уравнения можно записать в следующей форме:

$$Q(t) = \frac{U_0}{L} \left[ (\omega_0 - \omega)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 \right]^{-1/2} \cos(\omega t - \psi) \equiv, \quad (4.28)$$

$$\equiv Q(\omega) \cos(\omega t - \psi)$$

где  $\omega_0, \gamma$  – определяются соответственно формулами (4.20), (4.23); угол  $\psi$ , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (4.29)$$

описывает разность фаз между приложенным напряжением и установившимися в цепи колебаниями заряда. Колебания тока сдвинуты относительно колебаний заряда на  $\pi/2$ :

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t - \psi) = \omega Q_0 \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) \equiv, \quad (4.30)$$

$$\equiv I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Разность фаз между током и напряжением  $\varphi = \psi - \pi/2$ . Согласно (4.30), (4.29)

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \psi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (4.31)$$

Значит, ток отстает по фазе от напряжения, когда  $\omega L > 1/\omega C$ , и опережает его по фазе в противоположном случае.

Запишем уравнение вынужденных колебаний (4.27) в виде:

$$U_R + U_C + U_L = U_0 \cos \omega t, \quad (4.32)$$

где  $U_R = IR$  – напряжение на активном сопротивлении;  $U_C = Q/C$  напряжение на емкости;  $U_L = Ldl/dt$  напряжение на индуктивности. Это соотношение можно рассматривать как обобщение второго закона Кирхгофа для постоянных токов: сумма падений напряжения на отдельных элементах контура в каждый момент времени равна приложенному внешнему напряжению. Отсюда следует:

$$U_R = I_0 R \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.33)$$

$$U_C = \frac{Q_0}{C} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2), \quad (4.34)$$

$$U_L = \varphi L I_0 \cos(\omega t - \varphi + \pi/2). \quad (4.35)$$

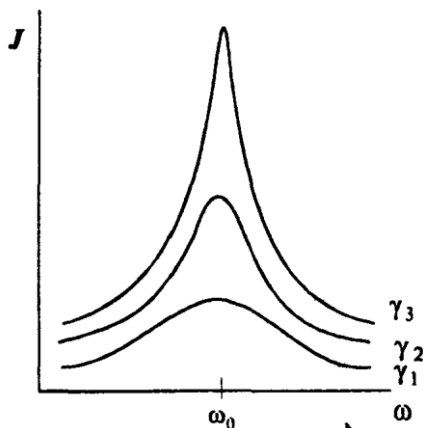
Из сравнения выражений для тока и напряжений на элементах контура следует, что напряжение на емкости отстает по фазе на  $\pi/2$  от к силы тока, а напряжение на индуктивности опережает ток на  $\pi/2$ . Напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током.

Из полученных формул следует, что амплитуда колебаний заряда, тока и напряжения в цепи, во-первых, пропорциональна приложенному напряжению и, во-вторых, обратно пропорциональна множителю:

$$\left[ (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2 \right]^{1/2} = \left[ \left( \omega^2 - \frac{1}{LC} \right)^2 + \frac{R^2 \omega^2}{L^2} \right]^{1/2}. \quad (4.36)$$

Указанный множитель принимает минимальное значение при определенной характерной для данной цепи частоте внешнего напряжения, что соответствует резкому возрастанию амплитуды вынужденных колебаний. Это явление называют резонансом, а характерную частоту, соответствующую максимальному возрастанию амплитуды колебаний, – резонансной.

На рис. изображена зависимость амплитуды колебаний тока (4.30) как функция частоты при различных величинах затухания  $\gamma$ . Видно, что резонанс проявляется тем резче, чем меньше затухание в цепи. Физическая причина резонанса состоит в возбуждении внешним периодически изменяющимся напряжением собственных колебаний в цепи. При малом затухании, когда  $R/L \ll \omega$ , частота собственных колебаний в цепи совпадает с



(4.20). Возникновение резонанса на частоте собственных колебаний становится понятным, если вернуться к уравнению вынужденных колебаний (4.27). Слагаемое, содержащее сопротивление, играет роль трения в системе – оно приводит к затуханию колебаний любой частоты. При колебаниях на всех частотах, кроме собственной, все члены уравнения оказываются одного порядка — на малых частотах основным из первых двух слагаемых левой части является  $Q/C$ , а на больших частотах доминирует первый член  $Ldl/dt \sim \omega^2 QL$ . При колебаниях же на собственной частоте, согласно (4.18), первые два слагаемых компенсируют друг друга, что соответствует свободным колебаниям в системе. При этом уравнение (4.27) принимает вид:

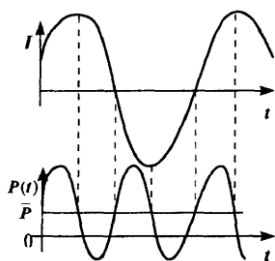
$$RI = U_0 \cos \omega t,$$

откуда следует, что при резонансе внешнее напряжение наиболее эффективно компенсирует работу сил трения. Таким образом, резонанс – возбуждение собственных колебаний в системе под действием периодической внешней силы – представляет собой осуществление в системе собственных незатухающих колебаний.

Явление резонанса имеет чрезвычайно важное значение в технике. Оно реализуется в колебательных системах различной физической природы (электрических цепях, механических системах, биологических объектах). В механике явление резонанса зачастую нежелательно, так как может приводить к раскачке колебаний и разрушению механических систем. Для уменьшения амплитуды колебаний следует увеличивать затухание в системе, сводя тем самым к минимуму действие периодической внешней силы. В радиотехнике явление резонанса используется для избирательного выделения из всего набора периодических внешних возмущений различных частот необходимой гармонической составляющей. Тем самым осуществляется прием радиочастотных сигналов.

Итак, были рассмотрены колебания в основном в электрических цепях, однако заметим, что уравнения, описывающие колебания самой различной природы, эквивалентны с точностью до обозначений. Поэтому наука, изучающая колебания, представляет собой самостоятельную область знаний — теорию колебаний.

### 4.2.3. Переменный электрический ток



Основной вывод предыдущего раздела заключается в том, что в электрической цепи, содержащей емкость, индуктивность и сопротивление, при приложении внешнего переменного напряжения частоты возникают колебания заряда, напряжения и тока той же частоты. Эти колебания можно рассматривать как протекание в цепи переменного тока под действием переменного напряжения. Согласно формулам (4.30), (4.28) с учетом определений (4.20) и (4.23):

$$I(t) = \left[ \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2 \right]^{-1/2} U_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.37)$$

где разность фаз между током и напряжением определяется формулой (4.31).

Соотношение (4.37) можно представить в виде:

$$I = U/Z(\omega), \quad (4.38)$$

где величину

$$Z = \sqrt{\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2}. \quad (4.39)$$

можно назвать полным электрическим сопротивлением для переменного тока, или импедансом. Величина  $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  – реактивное сопротивление, состоящее из индуктивного и емкостного сопротивлений. Реактивное сопротивление непосредственно не приводит к потерям энергии в цепи, однако является ответственным за установление фазовых соотношений между током и напряжением, влияющих на величину мощности, выделяемой в цепи. Мощность является наибольшей в том случае, если ток и напряжение в цепи совпадают по фазе.

Запишем величину мгновенной мощности, выделяемой в цепи,

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = IU \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.40)$$

и преобразуем ее к виду:

$$P(t) = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos(2\omega - \varphi). \quad (4.41)$$

Т.к.  $\cos\alpha \cdot \cos\beta = 1/2 \cdot [\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

Определим среднюю мощность, выделяемую за период колебаний, соотношением:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt.$$

Учитывая, что среднее значение за период колебаний косинуса равно нулю, находим:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi, \quad (4.42)$$

т.е. средняя мощность, выделяемая за период, является постоянной. Из сравнения формул (4.42) и (4.41) видно, что мгновенная мощность колеблется около среднего значения с частотой, в два раза превышающей частоту колебаний в цепи (рис.).

Из соотношения (4.31) видно, что

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z}. \quad (4.43)$$

Подставляя это выражение в (4.42) и используя (4.38), находим:

$$\bar{P} = \frac{R I_0^2}{2}. \quad (4.44)$$

Введем эффективные значения силы напряжения постоянного тока, который производит такую же мощность,

$$I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{эфф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (4.45)$$

Тогда выражение (4.42) принимает вид:

$$\bar{P} = I_{\text{эфф}} U_{\text{эфф}} \cos \varphi.$$

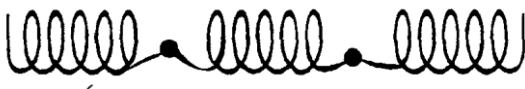
Множитель  $\cos\varphi$  называют коэффициентом мощности. Пара-

метры электрических цепей стараются подбирать таким образом, чтобы уменьшить реактивное сопротивление цепи и тем самым увеличить  $\cos\varphi$ . Рассмотренные в настоящем разделе колебания в электрических цепях представляют собой элементарные основы самостоятельной дисциплины — электротехники.

### 4.3. Волновое движение

#### 4.3.1. Связанные гармонические осцилляторы. Упругие волны

Рассмотрим систему связанных осцилляторов (рис.). Такой системой могут служить  $N$  маятников,



последовательно соединенных пружинами, или система связанных электрических контуров, или, как это показано на рис., набор материальных точек, соединенных пружинами.

Если колебания происходят вдоль оси  $x$ , то положение системы  $N$  материальных точек можно характеризовать заданием  $N$  величин смещений от своих положений равновесия. Таким образом, система осцилляторов обладает  $N$  степенями свободы, В отсутствие связи между осцилляторами каждый из них может совершать независимые колебания вблизи своего положения равновесия. В этом случае колебания локализованы в определенной области пространства. Но если мы возбудим колебания в системе связанных осцилляторов, то картина будет другой.

Колебания первоначально возбужденного осциллятора, благодаря упругим свойствам пружины, возбудят колебания соседнего осциллятора, который в свою очередь передаст энергию колебаний следующему соседу и т. д. При этом колебание первоначально возбужденного осциллятора прекратится, а передаваемая энергия колебаний будет распространяться вдоль цепочки, приводя к последовательному перемещению с постоянной скоростью сгущений и разрежения упруго связанных масс. Перенос энергии колебаний в пространстве представляет собой распространение волны.



Обратим внимание на два важных обстоятельства. Во-первых, передача колебаний от одного осциллятора другому стала возможной только благодаря упругому их взаимодействию. Таким образом, физическая причина распространения волны — взаимодействие частиц. Во-вторых, сами колеблющиеся массы остаются на своих местах вблизи положений равновесия, т.е. в процессе распространения волны масса не переносится. Происходит только передача энергии колебаний посредством изменения фазы колебания соседней частицы.

Опишем распространение волны математически. При колебаниях отдельного осциллятора величина, которая характеризует его смещение от положения равновесия, зависит только от времени. Так изменяется смещение массы на пружине или угол наклона маятника, т.е. фаза свободного осциллятора зависит только от одной переменной — времени.

При прохождении волны в цепочке связанных осцилляторов смещение каждой из масс зависит от двух величин — времени и расстояния до источника колебаний. Таким образом, смещение каждой из масс

$$u_n = u_n(x, t)$$

Запишем уравнение движения произвольно выбранного  $n$ -го осциллятора цепочки. При смещении из положения равновесия на массу действует возвращающая упругая сила, равная  $-ku_n$  ( $k$  — жесткость пружины). Одновременно на массу действуют упругие силы, обусловленные смещениями соседних масс:  $u_{n-1}$  и  $u_{n+1}$ . Взаимодействиями с более удаленными соседями пренебрежем. Слева на рассматриваемую массу будет действовать сила, пропорциональная удлинению левой пружины  $k(u_n - u_{n-1})$ , а справа — аналогичная сила, пропорциональная уменьшению длины правой пружины —  $k(u_n - u_{n+1})$ . В результате уравнение движения примет вид:

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}). \quad (4.46)$$

Как уже говорилось, уравнение (4.46) применимо ко многим физическим ситуациям. В частности, оно описывает колебания одномерной цепочки атомов в кристаллической решетке. В этом слу-

чае среднее расстояние между атомами является характерной для данного кристалла постоянной величиной, называемой периодом кристаллической решетки. Период решетки очень мал и по величине сравним с размерами атома. При таком расположении атомов в решетке кристалл можно рассматривать как сплошную среду, в которой распределение масс является не дискретным, как на рис., а непрерывным. Будем считать постоянную решетки бесконечно малой величиной. Тогда смещения соседних атомов на расстоянии  $\delta x$   $u_{n\pm 1}$  мало отличаются от смещения  $u_n$  и их можно разложить в ряды, ограничиваясь первыми членами:

$$u_{n\pm 1}(x) = u_n(x) \pm \frac{\partial u_n}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} (\delta x)^2,$$

где знак  $\delta/\delta x$  означает производную по  $x$  в фиксированный момент времени.

После подстановки этих выражений в уравнение (4. 46), получим:

$$m \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = k (\delta x)^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

(по той же причине, что и выше, мы стали писать производную в виде  $\delta/\delta t$ ).

То, что мы сейчас произвели, означает по существу переход от рассмотрения дискретной цепочки атомов, связанных упругими силами, к рассмотрению сплошной нити, в которой распределение масс атомов считается непрерывным. Переход к сплошной среде подразумевает, что мы теперь считаем массы атомов не сосредоточенными в узлах решетки, а «размазанными» на бесконечно малых расстояниях  $\delta x$ , т.е. величина  $m/\delta x = \rho$  является линейной плотностью среды. Наконец, выясним физический смысл множителя  $k\delta x$ . Заметим, что жесткость пружины согласно закону Гука  $F = -kx$  представляет собой линейную плотность упругой силы. Следовательно, величину  $k\delta x = T$  можно рассматривать как силу натяжения нити, образованной сплошным линейным распределением атомов. Окончательно, с учетом введенных обозначений, запишем уравнение в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.47)$$

где смещение теперь зависит от непрерывной переменной  $x$ :  $u = u(x, t)$ .

Полученное уравнение является уравнением распространения упругих волн в одномерной сплошной нити с натяжением  $T$  — струне. Нетрудно сообразить, как должно выглядеть решение уравнения (4.47). Оно должно описывать гармоническое колебание смещения частицы  $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \alpha)$ , которое возникает в какой-либо точке струны и затем распространяется с постоянной скоростью  $v_u$ . Пусть колебание возникло первоначально в точке  $x=0$ . Частица, находящаяся на расстоянии  $x$  от начала координат, при-

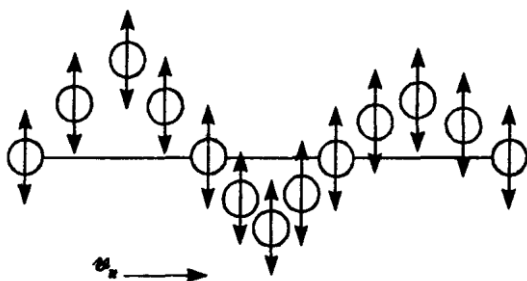
обретает такое же смещение с опозданием на время  $\frac{x}{v_u}$ , необходимое для того, чтобы колебание пришло в точку  $x$ . Таким образом, колебание частицы в точке  $x$  отстает по фазе от колебания частицы в точке  $x = 0$ , т.е. колебание в произвольной точке струны должно иметь следующий вид:

$$u(x, t) = u_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v_u} \right) + \alpha \right]. \quad (4.48)$$

Выражение (4.48) является решением уравнения (4.47), описывающим бегущую волну. Подставим его в уравнение (4.47), продифференцировав по отдельности дважды по времени и координате. В результате получим скорость упругой волны:

$$v_u = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (\rho - \text{линейная плотность среды}) \quad (4.49)$$

Формула (4.49) определяет скорость продольных упругих волн струны.



Колебания смещений атомов в продольной волне происходят в направлении ее рас-

пространения — вдоль струны. Как известно, упругая волна может быть и поперечной (рис.) — при этом смещения атомов происходят в направлении, перпендикулярном оси  $x$ . Величина, определяющая упругие свойства струны в поперечном направлении, называется сдвиговой жесткостью. Она отличается от продольной жесткости  $k$ , которая определяет скорость продольных волн. Нетрудно предположить, что уравнение для поперечных упругих волн сохранит вид (4.47), но в выражении для скорости распространения поперечных волн войдет компонента силы натяжения нити в направлении сдвига частиц  $T'$ .

Поперечные волны могут возникать только в твердых телах. В жидкостях и газах сопротивление атомов сдвигу отсутствует и поэтому в них распространяются только продольные упругие волны.

Упругие колебания, воспринимаемые человеческим ухом, обычно называются звуком. Эти колебания лежат в области частот от 16 до 20 000 колебаний в секунду. В широком смысле слова звуком можно называть все упругие колебания в сплошной среде. Оценим скорость звуковых волн в газе частиц. В отличие от одномерной цепочки атомов, рассмотренной выше, трехмерный газ частиц характеризуется давлением  $P$  и объемной плотностью  $\rho_g$ .

Поэтому вместо формулы (4.49) мы получим  $v_{зв} = \sqrt{\frac{P}{\rho_g}}$ . Восполь-

зуемся уравнением состояния газа  $PV = Nk_B T$  (где  $N$  — число частиц;  $T$  — температура газа;  $k_B$  — постоянная Больцмана). Вводя плотность газа  $\rho_g = mN/V$ , где  $m$  — масса частицы, находим, что скорость звука в газе частиц оказывается порядка средней скорости теплового движения частиц

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \approx v_T.$$

Это приближенный расчет, но он дает правильную оценку порядка величины скорости звука. Характерные скорости звуковых волн в газах порядка 300 м/с, а в твердых телах ~1000 м/с.

### 4.3.2. Свойства бегущих волн

Запишем уравнение (4.47) в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 u}{dx^2}. \quad (4.50)$$

где  $v$  — скорость перемещения величины и вдоль оси  $x$ . Это уравнение было получено для упругих волн в сплошной струне, но оно не содержит какой-либо специфики упругих волн, а выражает лишь волновой характер изменения физической величины  $u(x, t)$  во времени и пространстве. Поэтому, если под величиной  $v$  понимать скорость этого изменения, то данное уравнение можно рассматривать как общий вид волнового уравнения для произвольной физической величины  $u(x, t)$ .

Решением волнового уравнения согласно (4.48) является периодическая по времени и координате функция

$$u(x, t) = u \cdot \cos[\omega(t - x/v) + \alpha], \quad (4.51)$$

которая представляет собой бегущую волну, осуществляющую перенос фазы колебания величины и с постоянной скоростью  $u$  вдоль направления распространения волны. Расстояние, на которое перемещается фаза за один период колебания  $T$ ,  $\lambda = v \cdot T$  называется длиной волны. Удобно для описания волны пользоваться угловыми переменными — угловой частотой  $\omega = 2\pi/T$  и волновым числом  $k = 2\pi/\lambda$ . Скорость перемещения фазы может быть выражена через эти величины

$$v = v_\phi = \ell/T = \omega/k \quad (4.52)$$

и называется фазовой скоростью волны. Заменяя в уравнении (4.51) скорость на фазовую, запишем уравнение бегущей волны в виде:

$$u(x, t) = u \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (4.53)$$

Это уравнение представляет собой наиболее часто употребляемый вид бегущей волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ .

При распространении волны в сплошной среде колебания испытывает одновременно большое число частиц. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, образует волновую поверхность. Например, в случае волны (4.53), распространяю-

щейся вдоль оси  $x$ , волновыми поверхностями являются любые плоскости  $x = const$ . Такая волна называется плоской. Поверхность, отделяющая колеблющиеся частицы от остальной области пространства, которой колебания еще не достигли, — фронт волны.

Выше была рассмотрена волна, которая распространялась вдоль оси  $x$ . Это случай одномерного распространения, так как положение колеблющейся частицы определяется заданием только одной величины — ее координаты  $x$ . Волна может распространяться на плоскости — это случай двухмерного распространения. Наконец, волна может распространяться в трехмерном пространстве. Довольно частой является ситуация, когда источник колебаний локализован в малой области пространства или сосредоточен, а волна распространяется во все стороны от него. Если свойства среды, в которой распространяется волна, одинаковы по всем направлениям, то скорость волны во всех направлениях будет одна и та же, и все волновые поверхности, включая и фронт волны, будут представлять собой сферы с центром в точке нахождения источника колебаний. Такую волну называют сферической. На больших расстояниях от источника, когда радиус сферы, определяющей фронт волны, становится очень большим, участки волнового фронта с размерами, много меньшими расстояния до источника, можно рассматривать как плоские, т. е. считать сферическую волну плоской. Это приближение используется при решении многих задач.

Нетрудно написать уравнение сферической волны. Положение колеблющейся частицы определяется в этом случае только ее расстоянием от источника колебаний  $r$ , т. е. фаза колебаний должна иметь вид  $\omega t - kr + \alpha$ . Амплитуда колебаний в сферической волне, однако, не будет оставаться постоянной — она убывает с расстоянием, как  $1/r$ . Последнее утверждение вытекает из требования, чтобы поток энергии, переносимый волной через поверхность сферы любого, сколь угодно большого, радиуса оставался постоянным. Таким образом, сферическая волна должна иметь следующий вид:

$$u(r,t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (4.54)$$

где  $a$  — постоянная величина, численно равная амплитуде волны на расстоянии от источника, равном единице длины.

Найдем уравнение плоской волны, бегущей в трехмерном пространстве вдоль произвольного направления  $n$ . Выберем систему координат и возьмем волновую поверхность волны, находящуюся на расстоянии  $\ell$  от начала координат (рис.). Это будет плоскость, перпендикулярная вектору  $n$ . Если волна в начале координат задана уравнением:

$$u(0,t) = u_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha),$$

то колебания частиц на выбранной волновой поверхности будут иметь вид:

$$u(0,t) = u_0 \cdot \cos(\omega t - k\ell + \alpha).$$

Из рис. видно, что  $\vec{n} \cdot \vec{r} = r \cdot \cos\varphi = \ell$ , поэтому написанному выше уравнению можно придать вид:

$$u(\vec{r}, t) = u_0 \cdot \cos(\omega t - k \cdot \vec{n} \cdot \vec{r} + \alpha).$$

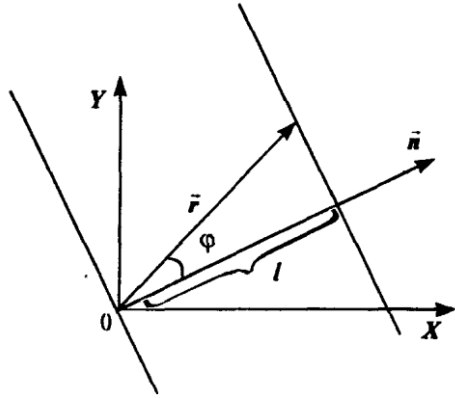
Введем вектор

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = k \cdot \vec{n}, \quad (4.55)$$

равный по величине волновому числу и направленный вдоль вектора  $n$  направления распространения волны. Величина  $\vec{k}$  называется волновым вектором. С его помощью уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в произвольном направлении  $n$ , приобретает вид:

$$u(\vec{r}, t) = u_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha). \quad (4.56)$$

Получим с помощью выражения (4.56) общий вид волнового уравнения, частным видом которого является (4.50). Колебания



частиц в волне являются функцией четырех переменных — трех пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и времени  $t$ . Продифференцируем выражение (4.56) по каждой из этих переменных дважды, пользуясь тем, что  $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -\omega^2 u;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k_x^2 u_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_x^2 u;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -k_y^2 u; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -k_z^2 u.$$

Складывая производные по координатам и выражая правую часть полученного выражения через производную по времени, находим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -k^2 u = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Наконец, заменяя  $\omega/k$  на фазовую скорость волны (4.52), окончательно получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4.57)$$

Это и есть общий вид волнового уравнения, который был выведен исходя из того, что выражение (4.51) представляет собой плоскую волну. На самом деле класс решений уравнения (4.57) необычайно широк. Всякая функция, которая удовлетворяет уравнению (4.57), описывает какую-либо волну. Например, решением этого уравнения является и сферическая волна (4.54). Волны могут быть и более сложной формы.

Частным случаем уравнения (4.57) является одномерная волна (4.50) — в этом случае колебания в волне не зависят от остальных координат.

### 4.3.3. Энергия, переносимая волной. Стоячие волны

При изучении механических колебаний было установлено, что



полная энергия колебаний гармонического осциллятора  $W = m\omega^2 A^2/2$ , где  $A$  — амплитуда колебания, (см. формулу (4.14)). Именно эта энергия переносится волной посредством возбуждения колебаний близлежащих частиц. Более полной характеристикой процесса переноса энергии волной является вектор плотности потока энергии волны  $\vec{j}$ , который определяет количество энергии, переносимое волной через единицу площади в одну секунду в направлении ее распространения. Если  $v$  — скорость волны, то за время  $\Delta t$  через площадку  $\Delta S$ , перпендикулярную направлению распространения, переносится количество энергии:

$$\Delta W = W \frac{\Delta S v \Delta t}{V} = w \Delta S v \Delta t,$$

где  $w$  — плотность энергии, заключенной в объеме  $V$ .

Разделив это выражение на  $\Delta S \Delta t$ , получим величину плотности потока энергии:

$$\vec{j} = w \cdot \vec{v}. \quad (4.58)$$

Наконец, если ввести вектор  $\vec{v}$ , равный по величине фазовой скорости волны и направленный вдоль волнового вектора  $\vec{k}$  (4.55), получим выражение для вектора плотности потока энергии:

$$\vec{j} = w \vec{v}. \quad (4.59)$$

Следовательно, направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением распространения волны.

Вектор (4.59) называется вектором Умова-Пойнтинга. Он является важной характеристикой переноса энергии волной и сохраняет свое значение и в тех случаях, когда речь идет не только о колебаниях частиц, но и о волновом процессе изменения любых физических величин, например температуры, электрического или магнитного полей.

Необычное перераспределение энергии колебаний происходит при наложении двух волн, бегущих навстречу друг другу, в том случае, когда разность фаз между волнами в процессе распространения волн остается постоянной. Такая ситуация реализуется при отражении бегущей волны от препятствия, например, при возбуждении упругой волны в струне, один из концов которой закреплен. При этом возникает отраженная волна, бегущая навстречу первой.

Пусть для простоты начальные фазы обеих волн равны нулю. Тогда результирующая волна будет суммой двух волн, бегущих в противоположных направлениях:

$$u_1 = u_0 \cos(\omega t - kx), \quad u_2 = u_0 \cos(\omega t + kx). \quad (4.60)$$

Сложив эти уравнения и преобразовав результат сложения по формуле для суммы косинусов, получим:

$$u = u_1 + u_2 = 2u_0 \cos kx \cdot \cos \omega t. \quad (4.61)$$

Заметим, что в результате наложения волн характер колебаний существенно изменился. Колебания во всех точках происходят одновременно с одинаковой частотой  $\omega$ . Иными словами, вся система колеблется как целое, причем передачи энергии в процессе колебаний от одной точки к другой не происходит. Каждая частица колеблется так, как это происходит при обычных колебаниях — в момент времени, когда ее смещение максимально, максимальна ее потенциальная энергия и минимальна кинетическая, и наоборот. В каждый момент времени система частиц образует в пространстве периодическую структуру, форма которой определяется амплитудным множителем в выражении (4.61):  $A(x) = 2u_0 \cos kx$ .

В точках

$$x = \pm 2n\lambda/4 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.62)$$

амплитуда колебаний наибольшая, а в точках

$$x = \pm(2n+1)\lambda/4 \quad (4.63)$$

она равна нулю. Эти точки называют соответственно пучностями и узлами волны. Узлы и пучности волны расположены друг от друга на расстоянии  $\ell/4$ .

Описанную картину колебаний во встречных бегущих волнах называют стоячей волной. Ясно, что в замкнутом объеме, где бегущая волна испытывает отражение от обеих границ, устанавливается стоячая волна.

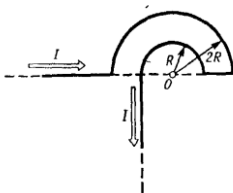
## Контрольная работа 4.

Таблица вариантов.

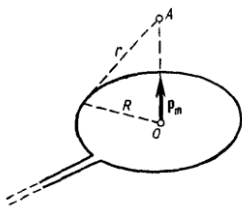
Вари-  
ант

Номера задач

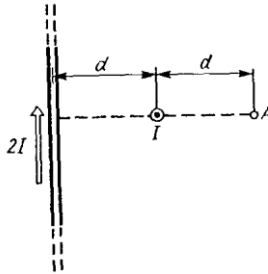
0	410	420	430	440	450	460	470	480
1	401	411	421	431	441	451	461	471
2	402	412	422	432	442	452	462	472
3	403	413	423	433	443	453	463	473
4	404	414	424	434	444	454	464	474
5	405	415	425	435	445	455	465	475
6	406	416	426	436	446	456	466	476
7	407	417	427	437	447	457	467	477
8	408	418	428	438	448	458	468	478
9	409	419	429	439	449	459	469	479



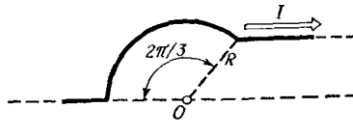
401. Бесконечно длинный провод с током  $I=100$  А изогнут так, как это показано на рис. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $O$ . Радиус дуги  $R=10$  см.



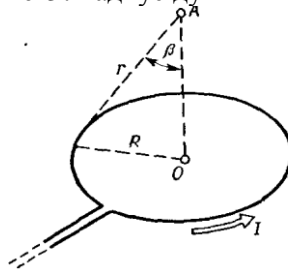
402. Магнитный момент тонкого проводящего кольца  $p_m=5\text{А}\cdot\text{м}^2$ . Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $A$ , находящейся на оси кольца и удаленной от точек кольца на расстояние  $r=20$  см (рис.).



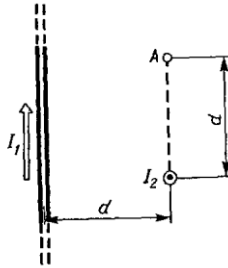
403. По двум скрещенным под прямым углом бесконечно длинным проводам текут токи  $I$  и  $2I$  ( $I=100$  А). Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $A$  (рис.). Расстояние  $d=10$  см.



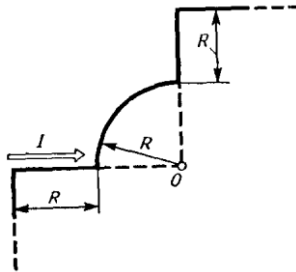
404. По бесконечно длинному проводу, изогнутому так, как это показано на рис., течет ток  $I=200$  А. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $O$ . Радиус дуги  $R=10$  см.



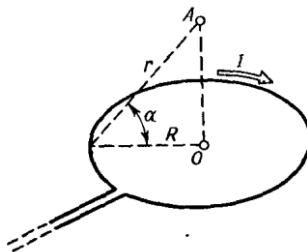
405. По тонкому кольцу радиусом  $R=20$  см течет ток  $I=100$  А. Определить магнитную индукцию  $B$  на оси кольца в точке  $A$  (рис.). Угол  $\beta=\pi/3$ .



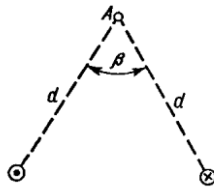
406. По двум бесконечно длинным проводам, скрещенным под прямым углом, текут токи  $I_1$  и  $I_2=2I_1$  ( $I_1=100$  А). Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $A$ , равноудаленной от проводов на расстояние  $d=10$  см (рис.).



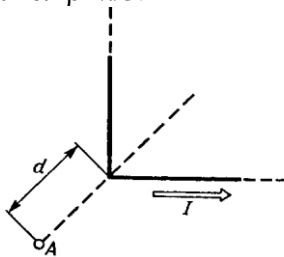
407. По бесконечно длинному проводу, изогнутому так, как это показано на рис., течет ток  $I=200$  А. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $O$ . Радиус дуги  $R=10$  см.



408. По тонкому кольцу течет ток  $I=80$  А. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $A$ , равноудаленной от точек кольца на расстоянии  $r=10$  см (рис.). Угол  $\alpha = \pi/6$ .



409. По двум бесконечно длинным, прямым параллельным проводам текут одинаковые токи  $I=60$  А. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $A$  (рис.), равноудаленной от проводов на расстоянии  $d=10$  см. Угол  $\beta=\pi/3$ .



410. Бесконечно длинный провод с током  $I=50$  А изогнут так, как это показано на рис. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке  $A$ , лежащей на биссектрисе прямого угла на расстоянии  $d=10$  см от его вершины.
411. По двум параллельным проводам длиной  $\ell=3$  м каждый текут одинаковые токи  $I=500$  А. Расстояние  $d$  между проводами равно 10 см. Определить силу  $F$  взаимодействия проводов.
412. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии  $d=20$  см друг от друга, текут одинаковые токи  $I=400$  А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить для каждого из проводов отношение силы, действующей на него, к его длине.
413. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи  $I=200$  А. Определить силу  $F$ , действующую на рамку, если

- ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии, равном ее длине.
414. Короткая катушка площадью поперечного сечения  $S=250 \text{ см}^2$ , содержащая  $N=500$  витков провода, по которому течет ток  $I=5 \text{ А}$ , помещена в однородное магнитное поле напряженностью  $H=1000 \text{ А/м}$ . Найти:
- 1) магнитный момент  $p_m$  катушки; 2) вращающий момент  $M$ , действующий на катушку, если ось катушки составляет угол  $\varphi=30^\circ$  с линиями поля.
415. Тонкий провод длиной  $\ell=20 \text{ см}$  изогнут в виде полукольца и помещен в магнитное поле ( $B=10 \text{ мТл}$ ) так, что площадь полукольца перпендикулярна линиям магнитной индукции. По проводу пропустили ток  $I=50 \text{ А}$ . Определить силу  $F$ , действующую на провод. Подводящие провода направлены вдоль линий магнитной индукции.
416. Шины генератора длиной  $\ell=4 \text{ м}$  находятся на расстоянии  $d=10 \text{ см}$  друг от друга. Найти силу взаимного отталкивания шин при коротком замыкании, если ток  $I_{к.з.}$  короткого замыкания равен  $5 \text{ кА}$ .
417. Квадратный контур со стороной  $a=10 \text{ см}$ , по которому течет ток  $I=50 \text{ А}$ , свободно установился в однородном магнитном поле ( $B=10 \text{ мТл}$ ). Определить изменение  $\Delta\Pi$  потенциальной энергии контура при повороте вокруг оси, лежащей в плоскости контура, на угол  $\vartheta = 180^\circ$ .
418. Тонкое проводящее кольцо с током  $I=40 \text{ А}$  помещено в однородное магнитное поле ( $B=80 \text{ мТл}$ ). Плоскость кольца перпендикулярна линиям магнитной индукции. Радиус  $R$  кольца равен  $20 \text{ см}$ . Найти силу  $F$ , растягивающую кольцо.
419. Квадратная рамка из тонкого провода может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из сторон. Масса  $m$  рамки равна  $20 \text{ г}$ . Рамку поместили в однородное магнитное поле ( $B=0,1 \text{ Тл}$ ), направленное вертикально вверх. Определить угол  $\alpha$ , на который отклонилась рамка от вертикали, когда по ней пропустили ток  $I=10 \text{ А}$ .
420. По круговому витку радиусом  $R=5 \text{ см}$  течет ток  $I=20 \text{ А}$ . Виток

расположен в однородном магнитном поле ( $B=40$  мТл) так, что нормаль к плоскости контура составляет угол  $\vartheta=\pi/6$  с вектором  $B$ . Определить изменение  $\Delta\Pi$  потенциальной энергии контура при его повороте на угол  $\varphi=\pi/2$  в направлении увеличения угла  $\vartheta$ .

421. По тонкому кольцу радиусом  $R=10$  см равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau=50$  нКл/м. Кольцо вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр, с частотой  $n=10$  с<sup>-1</sup>. Определить магнитный момент  $p_m$ , обусловленный вращением кольца.
422. Диск радиусом  $R=8$  см несет равномерно распределенный по поверхности заряд ( $\sigma=100$  нКл/м<sup>2</sup>). Определить магнитный момент  $p_m$ , обусловленный вращением диска, относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости диска. Угловая скорость вращения диска  $\omega=60$  рад/с.
423. Стержень длиной  $\ell=20$  см заряжен равномерно распределенным зарядом с линейной плотностью  $\tau=0,2$  мКл/м. Стержень вращается с частотой  $n=10$  с<sup>-1</sup> относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Определить магнитный момент  $p_m$ , обусловленный вращением стержня.
424. Протон движется по окружности радиусом  $R=0,5$  см с линейной скоростью  $v=10^6$  м/с. Определить магнитный момент  $p_m$ , создаваемый эквивалентным круговым током.
425. Тонкое кольцо радиусом  $R=10$  см несет равномерно распределенный заряд  $Q=80$  нКл. Кольцо вращается с угловой скоростью  $\omega=50$  рад/с относительно оси, совпадающей с одним из диаметров кольца. Найти магнитный момент  $p_m$ , обусловленный вращением кольца.
426. Заряд  $Q=0,1$  мКл равномерно распределен по стержню длиной  $\ell=50$  см. Стержень вращается с угловой скоростью  $\omega=20$  рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Найти магнитный момент  $p_m$ , обусловленный вращением стержня.
427. Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра (протона) по окружности радиусом  $R=53$  пм. Определить магнитный момент



- $p_m$  эквивалентного кругового тока.
428. Сплошной цилиндр радиусом  $R=4$  см и высотой  $h=15$  см несет равномерно распределенный по объему заряд ( $\rho=0,1$  мкКл/м<sup>3</sup>). Цилиндр вращается с частотой  $n=10$  с<sup>-1</sup> относительно оси, совпадающей с его геометрической осью. Найти магнитный момент  $p_m$ , цилиндра, обусловленный его вращением.
429. По поверхности диска радиусом  $R=15$  см равномерно распределен заряд  $Q=0,2$  мкКл. Диск вращается с угловой скоростью  $\omega=30$  рад/с относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить магнитный момент  $p_m$ , обусловленный вращением диска.
430. По тонкому стержню длиной  $\ell=40$  см равномерно распределен заряд  $Q=60$  нКл. Стержень вращается с частотой  $n=12$  с<sup>-1</sup> относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через стержень на расстоянии  $a=\ell/3$  от одного из его концов. Определить магнитный момент  $p_m$ , обусловленный вращением стержня.
431. Два иона разных масс с одинаковыми зарядами влетели в однородное магнитное поле, стали двигаться по окружностям радиусами  $R_1=3$  см и  $R_2=1,73$  см. Определить отношение масс ионов, если они прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов.
432. Однозарядный ион натрия прошел ускоряющую разность потенциалов  $U=1$  кВ и влетел перпендикулярно линиям магнитной индукции в однородное поле ( $B=0,5$  Тл). Определить относительную атомную массу  $A$  иона, если он описал окружность радиусом  $R=4,37$  см.
433. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов  $U=800$  В и, влетев в однородное магнитное поле  $B=47$  мТл, стал двигаться по винтовой линии с шагом  $h=6$  см. Определить радиус  $R$  винтовой линии.
434. Альфа-частица прошла ускоряющую разность потенциалов  $U=300$  В и, попав в однородное магнитное поле, стала двигаться по винтовой линии радиусом  $R=1$  см и шагом  $h=4$  см. Определить магнитную индукцию  $B$  поля.

435. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов  $U=100$  В и, влетев в однородное магнитное поле ( $B=0,1$  Тл), стала двигаться по винтовой линии с шагом  $h=6,5$  см и радиусом  $R=1$  см. Определить отношение заряда частицы к ее массе.
436. Электрон влетел в однородное магнитное поле ( $B=200$  мТл) перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определить силу эквивалентного кругового тока  $I_{\text{экв}}$ , создаваемого движением электрона в магнитном поле.
437. Протон прошел ускоряющую разность потенциалов  $U=300$  В и влетел в однородное магнитное поле ( $B=20$  мТл) под углом  $\alpha=30^\circ$  к линиям магнитной индукции. Определить шаг  $h$  и радиус  $R$  винтовой линии, по которой будет двигаться протон в магнитном поле.
438. Альфа-частица, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U$ , стала двигаться в однородном магнитном поле ( $B=50$  мТл) по винтовой линии с шагом  $h=5$  см и радиусом  $R=1$  см. Определить ускоряющую разность потенциалов, которую прошла альфа-частица.
439. Ион с кинетической энергией  $T=1$  кэВ попал в однородное магнитное поле ( $B=21$  мТл) и стал двигаться по окружности. Определить магнитный момент  $p_m$  эквивалентного кругового тока.
440. Ион, попав в магнитное поле ( $B=0,01$  Тл), стал двигаться по окружности. Определить кинетическую энергию  $T$  (в эВ) иона, если магнитный момент  $p_m$  эквивалентного кругового тока равен  $1,6 \cdot 10^{-14}$  А·м<sup>2</sup>.
441. Протон влетел в скрещенные под углом  $\alpha=120^\circ$  магнитное ( $B=50$  мТл) и электрическое ( $E=20$  кВ/м) поля. Определить ускорение  $a^*$  протона, если его скорость  $v$  ( $|v|=4 \cdot 10^4$  м/с) перпендикулярна векторам  $E$  и  $B$ .
442. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U=645$  В,

---

\* Ускорение  $a$  определяется в момент вхождения заряженной частицы в область пространства, где локализованы однородные магнитное и электрическое поля.

- влетел в скрещенные под прямым углом однородные магнитное ( $B=1,5\text{ мТл}$ ) и электрическое ( $E=200\text{ В/м}$ ) поля. Определить отношение заряда иона к его массе, если ион в этих полях движется прямолинейно.
443. Альфа-частица влетела в скрещенные под прямым углом магнитное ( $B=5\text{ мТл}$ ) и электрическое ( $E=30\text{ кВ/м}$ ) поля. Определить ускорение  $a^*$  альфа-частицы, если ее скорость  $v$  ( $|v|=2\cdot 10^6\text{ м/с}$ ) перпендикулярна векторам  $B$  и  $E$ , причем силы, действующие со стороны этих полей, противоположны.
444. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U=1,2\text{ кВ}$ , попал в скрещенные под прямым углом однородные магнитное и электрическое поля. Определить напряженность  $E$  электрического поля, если магнитная индукция  $B$  поля равна  $6\text{ мТл}$ .
445. Однородные магнитное ( $B=2,5\text{ мТл}$ ) и электрическое ( $E=10\text{ кВ/м}$ ) поля скрещены под прямым углом. Электрон, скорость  $v$  которого равна  $4\cdot 10^6\text{ м/с}$ , влетает в эти поля так, что силы, действующие на него со стороны магнитного и электрического полей, сонаправлены. Определить ускорение  $a^*$  электрона.
446. Однозарядный ион лития массой  $m = 7\text{ а. е. м.}$  прошел ускоряющую разность потенциалов  $U=300\text{ В}$  и влетел в скрещенные под прямым углом однородные магнитное и электрическое поля. Определить магнитную индукцию  $B$  поля, если траектория иона в скрещенных полях прямолинейна. Напряженность  $E$  электрического поля равна  $2\text{ кВ/м}$ .
447. Альфа-частица, имеющая скорость  $v = 2\text{ Мм/с}$ , влетает под углом  $\alpha = 30^\circ$  к сонаправленному магнитному ( $B=1\text{ мТл}$ ) и электрическому ( $E=1\text{ кВ/м}$ ) полям. Определить ускорение  $a^*$  альфа-частицы.
448. Протон прошел некоторую ускоряющую разность потенциалов  $U$  и влетел в скрещенные под прямым углом однородные поля: магнитное ( $B = 5\text{ мТл}$ ) и электрическое ( $E=20\text{ кВ/м}$ ). Определить разность потенциалов  $U$ , если протон в скрещенных полях движется прямолинейно.
449. Магнитное ( $B=2\text{ мТл}$ ) и электрическое ( $E=1,6\text{ кВ/м}$ ) поля сона-

- правлены. Перпендикулярно векторам  $B$  и  $E$  влетает электрон со скоростью  $v = 0,8$  Мм/с. Определить ускорение  $a^*$  электрона.
450. В скрещенные под прямым углом однородные магнитное ( $H=1$ МА/м) и электрическое ( $E=50$ кВ/м) поля влетел ион. При какой скорости  $v$  иона (по модулю и направлению) он будет двигаться в скрещенных полях прямолинейно?
451. Плоский контур площадью  $S=20$ см<sup>2</sup> находится в однородном магнитном поле ( $B=0,03$  Тл). Определить магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий контур, если плоскость его составляет угол  $\varphi=60^\circ$  с направлением линий индукции.
452. Магнитный поток  $\Phi$  сквозь сечение соленоида равен 50 мкВб. Длина соленоида  $\ell=50$  см. Найти магнитный момент соленоида, если его витки плотно прилегают друг к другу.
453. В средней части соленоида, содержащего  $n=8$  витков/см, помещен круговой виток диаметром  $d=4$  см. Плоскость витка расположена под углом  $\varphi=60^\circ$  к оси соленоида. Определить магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий виток, если по обмотке соленоида течет ток  $I=1$  А.
454. На длинный картонный каркас диаметром  $d_1=5$  см уложена однослойная обмотка (виток к витку) из проволоки диаметром  $d_2=0,2$ мм. Определить магнитный поток  $\Phi$ , создаваемый таким соленоидом при силе тока  $I=0,5$  А.
455. Квадратный контур со стороной  $a=10$  см, в котором течет ток  $I=6$  А, находится в магнитном поле ( $B=0,8$  Тл) под углом  $\alpha=50^\circ$  к линиям индукции. Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы при неизменной силе тока в контуре изменить его форму на окружность?
456. Плоский контур с током  $I=5$ А свободно установился в однородном магнитном поле ( $B=0,4$ Тл). Площадь контура  $S=200$  см<sup>2</sup>. Поддерживая ток в контуре неизменным, его повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура, на угол  $\alpha=40^\circ$ . Определить совершенную при этом работу  $A$ .
457. Виток, в котором поддерживается постоянная сила тока  $I=60$  А, свободно установился в однородном магнитном поле

- ( $B=20$  мТл). Диаметр витка  $d=10$  см. Какую работу  $A$  нужно совершить для того, чтобы повернуть виток относительно оси, совпадающей с диаметром, на угол  $\alpha=\pi/3$ ?
458. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции расположен плоский контур площадью  $S=100$  см<sup>2</sup>. Поддерживая в контуре постоянную силу тока  $I=50$  А, его переместили из поля в область пространства, где поле отсутствует. Определить магнитную индукцию  $B$  поля, если при перемещении контура была совершена работа  $A = 0,4$  Дж.
459. Плоский контур с током  $I=50$  А расположен в однородном магнитном поле ( $B=0,6$  Тл) так, что нормаль к контуру перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить работу, совершаемую силами поля при медленном повороте контура около оси, лежащей в плоскости контура, на угол  $\alpha=30^\circ$ .
460. Определить магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий соленоид, если его длина  $\ell=50$  см и магнитный момент  $p_m=0,4$  Вб.
461. В однородном магнитном поле ( $B=0,1$  Тл) равномерно с частотой  $n=5$  с<sup>-1</sup> вращается стержень длиной  $\ell=50$  см так, что плоскость его вращения перпендикулярна линиям напряженности, а ось вращения проходит через один из его концов. Определить индуцируемую на концах стержня разность потенциалов  $U$ .
462. В однородном магнитном поле с индукцией  $B=0,5$  Тл вращается с частотой  $n= 10$  с<sup>-1</sup> стержень длиной  $\ell=20$  см. Ось вращения параллельна линиям индукции и проходит через один из концов стержня перпендикулярно его оси. Определить разность потенциалов  $U$  на концах стержня.
463. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. При этом по цепи прошел заряд  $Q=50$  мкКл. Определить изменение магнитного потока  $\Delta\Phi$  через кольцо; если сопротивление цепи гальванометра  $R=10$  Ом.
464. Тонкий медный провод массой  $m=5$  г согнут в виде квадрата, и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное маг-

- нитное поле ( $B=0,2$  Тл) так, что его плоскость перпендикулярна линиям поля. Определить заряд  $Q$ , который потечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию.
465. Рамка из провода сопротивлением  $R=0,04$  Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле ( $B=0,6$  Тл). Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки  $S=200$  см. Определить заряд  $Q$ , который потечет по рамке при изменении угла между нормалью к рамке и линиями индукции: 1) от 0 до  $45^\circ$ ; 2) от  $45^\circ$  до  $90^\circ$ .
- 466 Проволочный виток диаметром  $D=5$  см и сопротивлением  $R=0,02$  Ом находится в однородном магнитном поле ( $B=0,3$  Тл). Плоскость витка составляет угол  $\varphi=40^\circ$  с линиями индукции. Какой заряд  $Q$  протечет по витку при выключении магнитного поля?
467. Рамка, содержащая  $N=200$  витков тонкого провода, может свободно вращаться относительно оси, лежащей в плоскости рамки. Площадь рамки  $S=50$  см<sup>2</sup>. Ось рамки перпендикулярна линиям индукции однородного магнитного поля ( $B=0,05$  Тл). Определить максимальную ЭДС  $\varepsilon_{max}$ , которая индуцируется в рамке при ее вращении с частотой  $n=40$  с<sup>-1</sup>.
468. Прямой проводящий стержень длиной  $\ell=40$  см находится в однородном магнитном поле ( $B=0,1$  Тл). Концы стержня замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи  $R=0,5$  Ом. Какая мощность  $P$  потребуется для равномерного перемещения стержня перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью  $v=10$  м/с?
469. Проволочный контур площадью  $S=500$  см<sup>2</sup> и сопротивлением  $R=0,1$  Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле ( $B=0,5$  Тл). Ось вращения лежит в плоскости кольца и перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить максимальную мощность  $P_{max}$ , необходимую для вращения контура с угловой скоростью  $\omega=50$  рад/с.
470. Кольцо из медного провода массой  $m=10$  г помещено в однородное магнитное поле ( $B=0,5$  Тл) так, что плоскость кольца

- составляет угол  $\beta=60^\circ$  с линиями магнитной индукции. Определить заряд  $Q$ , который пройдет по кольцу, если снять магнитное поле.
471. Соленоид сечением  $S=10\text{ см}^2$  содержит  $N=10^3$  витков. При силе тока  $I=5\text{ А}$  магнитная индукция  $B$  поля внутри соленоида равна  $0,05\text{ Тл}$ . Определить индуктивность  $L$  соленоида.
472. На картонный каркас длиной  $\ell=0,8\text{ м}$  и диаметром  $D=4\text{ см}$  намотан в один слой провод диаметром  $d=0,25\text{ мм}$  так, что витки плотно прилегают друг к другу. Вычислить индуктивность  $L$  получившегося соленоида.
473. Катушка, намотанная на магнитный цилиндрический каркас, имеет  $N=250$  витков и индуктивность  $L_1=36\text{ мГн}$ . Чтобы увеличить индуктивность катушки до  $L_2=100\text{ мГн}$ , обметку катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой проволоки с таким расчетом, чтобы длина катушки осталась прежней. Сколько витков оказалось в катушке после перемотки?
474. Индуктивность  $L$  соленоида, намотанного в один слой на немагнитный каркас, равна  $0,5\text{ мГн}$ . Длина  $\ell$  соленоида равна  $0,6\text{ м}$ , диаметр  $D=2\text{ см}$ . Определить отношение  $n$  числа витков соленоида к его длине.
475. Соленоид содержит  $N=800$  витков. Сечение сердечника (из немагнитного материала)  $S=10\text{ см}^2$ . По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией  $B=8\text{ мТл}$ . Определить среднее значение ЭДС  $\langle \varepsilon_s \rangle$  самоиндукции, которая возникает на зажимах соленоида, если сила тока уменьшается практически до нуля за время  $\Delta t=0,8\text{ мс}$ .
476. По катушке индуктивностью  $L=8\text{ мкГн}$  течет ток  $I=6\text{ А}$ . Определить среднее значение ЭДС  $\langle \varepsilon_s \rangle$  самоиндукции, возникающей в контуре, если сила тока изменится практически до нуля за время  $\Delta t=5\text{ мс}$ .
477. В электрической цепи, содержащей резистор сопротивлением  $R=20\text{ Ом}$  и катушку индуктивностью  $L=0,06\text{ Гн}$ , течет ток  $I=20\text{ А}$ . Определить силу тока в цепи через  $\Delta t=0,2\text{ мс}$  после ее размыкания.
478. Цепь состоит из катушки индуктивностью  $L=0,1\text{ Гн}$  и источ-

- ника тока. Источник тока отключили, не разрывая цепи. Время, через которое сила тока уменьшится до 0,001 первоначального значения, равно  $t=0,07$  с. Определить сопротивление катушки.
479. Источник тока замкнули на катушку сопротивлением  $R=10$  Ом и индуктивностью  $L=0,2$  Гн. Через какое время сила тока в цепи достигнет 50% максимального значения?
480. Источник тока замкнули на катушку сопротивлением  $R=20$  Ом. Через время  $t=0,1$  с сила тока  $I$  в катушке достигла 0,95 предельного значения. Определить индуктивность  $L$  катушки.

## Рекомендуемая литература:

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. –М.: Наука, 1987 г.–432 с.
2. Бланк А.Я. Физика. –Х.: Каравелла, 1996 г.–272 с.
3. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике.– М.: Высшая школа, 1981 г.

## Содержание.

<u>III. Электричество и магнетизм.....</u>	3
<u>3.1. Закон Кулона. Напряженность электрического поля.</u>	
<u>Потенциал.....</u>	3
<u>3.2. Теорема Гаусса. Вычисление полей. Энергия</u>	
<u>электрического поля.....</u>	10
<u>3.2.1. Теорема Гаусса.....</u>	10
<u>3.2.2. Электрическая емкость .....</u>	15
<u>3.2.3. Энергия системы зарядов.....</u>	17
<u>3.3. Электрическое поле в среде.....</u>	19
<u>3.3.1. Диэлектрики.....</u>	19



<u>3.3.2. Проводники в электрическом поле</u> .....	23
<u>3.4. Электрический ток</u> .....	25
<u>3.4.1. Сила и плотность тока</u> .....	25
<u>3.4.2. Закон Ома</u> .....	27
<u>3.4.3. Электрические цепи</u> .....	30
<u>Контрольная работа 3</u> .....	32
<u>Задачи для самостоятельного решения</u> .....	32
<u>3.5. Магнитостатика</u> .....	45
<u>3.5.1. Природа магнитного поля</u> .....	45
<u>3.5.2. Свойства магнитного поля. Закон Био-Савара</u> .....	47
<u>3.5.3. Силы в магнитном поле</u> .....	50
<u>А. Сила Лоренца</u> .....	50
<u>Б. Сила Ампера</u> .....	52
<u>В. Силы, действующие на замкнутый контур с током в</u> <u>однородном магнитном поле. Магнитный момент тока</u> .....	53
<u>3.5.4. Магнитное поле в веществе. Магнетика</u> .....	55
<u>3.5.5. Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля.</u> <u>Поле соленоида</u> .....	57
<u>3.5.6. Электромагнитная индукция</u> .....	62
<u>3.5.7. Энергия магнитного поля</u> .....	63
<u>IV. Колебания и волны</u> .....	65
<u>4.1. Механические колебания</u> .....	65
<u>4.1.1. Гармонические колебания. Осциллятор</u> .....	65
<u>4.1.2. Сложение колебаний</u> .....	70
<u>4.2. Электрические колебания</u> .....	72
<u>4.2.1. Свободные колебания в электрическом контуре</u> .....	72
<u>4.2.2. Вынужденные колебания. Резонанс</u> .....	77
<u>4.2.3. Переменный электрический ток</u> .....	80
<u>4.3. Волновое движение</u> .....	82
<u>4.3.1. Связанные гармонические осцилляторы. Упругие волны</u> .....	82
<u>4.3.2. Свойства бегущих волн</u> .....	87
<u>4.3.3. Энергия, переносимая волной. Стоячие волны</u> .....	91
<u>Контрольная работа 4</u> .....	93
<u>Рекомендуемая литература</u> .....	106