Глава.1 Механика.

Введение.

Физика изучает явления, наблюдаемые в реальном мире, и свойства материальных объектов. Эти явления и свойства мы характеризуем с помощью физических величин. Например, движение характеризуется скоростью и ускорением, свойства тел притягивать друг друга характеризуются массой или зарядом. Наблюдаемые нами явления и физические свойства тел возникают вследствие взаимодействия между телами либо между частицами — атомами и молекулами, из которых состоят материальные тела. В результате этих взаимодействий соответствующие физические величины не остаются постоянными, а испытывают всевозможные изменения. Эти изменения могут происходить как непрерывно, так и скачками, как по величине, так и по направлению. При наблюдении изменений физических величин возникает необходимость в их количественной и качественной оценке. Для этой цели физика использует математические методы.

В отличие от математики, которая изучает количественные и пространственные отношения между рассматриваемыми объектами, физика изучает материальные свойства тел и частиц, из которых состоят эти тела. Как показывает опыт, материальные свойства обусловлены взаимодействиями между телами либо между частицами. В природе существуют разные взаимодействия. Каждое из них имеет свои особенности, и поэтому физика разделяется на ряд областей, изучающих отдельные виды взаимодействий. На первый взгляд физика состоит из целого ряда независимых разделов — механики, термодинамики, электродинамики, оптики и других. На самом деле эти области физики настолько связаны друг с другом, что не могут существовать друг без друга и, строго говоря, даже не могут быть разделены. Ведь сама природа не делит всевозможные взаимодействия на различные виды, в природе все происходит сразу и вместе. Возможность рассмотрения каждого вида взаимодействия по отдельности, как это делается в физике, связана с тем, что при изучении конкретного взаимодействия мы считаем, что другие взаимодействия отсутствуют или очень малы. Можно ли это делать или нельзя, в каждом отдельном случае показывает опыт. В этом заключается существо физического подхода к изучению явлений и свойств материальных объектов.

Наши знания о различных видах взаимодействий возникли не сразу, а развивались последовательно и постепенно. Сначала постигались наиболее простые механизмы взаимодействий, при этом все, что не соответствовало опыту, отбрасывалось, а то, что было нужно и полезно, закладывалось в фундамент Нового знания. Так — от простого к сложному — возводилась конструкция огромного и связанного воедино здания современной физики. При изучении физики мы тоже будем следовать этому естественному принципу.

Во многих случаях действие одного тела на другое или каких-либо частиц друг на друга мы, в конечном счете, обнаруживаем» наблюдая перемещение какого-либо макроскопического тела в пространстве. Макроскопическим мы называем тело, состоящее из большого числа микроскопических частиц — атомов и молекул. На опыте мы всегда имеем дело с макроскопическими телами, хотя результаты опыта позволяют нам часто судить о свойствах составляющих тело микрочастиц (именно так мы узнали о существовании атомов и молекул).

Например, при столкновении одного шара с другим шар, который прежде находился в покое, переместился в пространстве. Изменение электрического тока в цепи мы отмечаем по перемещению стрёлки амперметра. Увеличение температуры мы обнаруживаем по перемещению ртутного столбика в термометре. Конечно, не всегда действие одного тела на другое обязательно приводит к перемещению последнего, но нас сейчас будет интересовать именно такой результат действия, поскольку он является наиболее простым из всех, которые встречаются в природе.

Как показывает опыт, никакое следствие не возникает без причины. В частности, причиной указанных выше перемещений макроскопических тел являются действия на них других тел. Таким образом, измеряя перемещение тела вследствие его взаимодействия с другими телами, мы можем судить о характере и величине этого взаимодействия. Поэтому так важно уметь описывать всевозможные перемещения тела в пространстве и характеризовать состояние тела в процессе его перемещения.

Перемещение тела в пространстве с течением времени представляет собой движение. Раздел физики, в котором изучается движение тел и его изменения в результате действия других тел, называется механикой. В свою очередь раздел механики, в котором изучают свойства движения тел, не рассматривая причин, приводящих к этому движению, называют кинематикой, а раздел механики, в котором изучается изменение движения под действием других тел называют динамикой.

Изучая физику, мы будем иметь дело с физическими величинами. Необходимо ясно представлять себе, что такое физическая величина, чем она отличается от математической или от величин, рассматриваемых в других науках.

Физика — опытная наука. Все, что мы узнали о материальном мире, возникло из опыта. И любые заключения и предположения, которые мы делаем о свойствах материальных объектов, в конечном счете проверяются на опыте. Другими словами, опыт является окончательным критерием правильности наших представлений. В процессе опыта мы определяем те или иные физические величины, например скорость или температуру. Таким образом, определить физическую величину означает указать способ ее измерения. Физические величины являются наблюдаемыми. Напротив, если мы говорим о какой-либо величине и не можем указать способ ее измерения, то она не является наблюдаемой. Такие величины просто не рассматриваются в физике, не являются ее предметом.

Далее, физические величины являются достоверными в том смысле, что физический опыт должен обладать свойством повторяемости. Это значит, что при повторении опыт, проведенный в равных условиях, должен приводить всякий раз к одинаковому результату. В других науках это не всегда так, и чем менее выполняется это требование, тем менее эта наука достоверна.

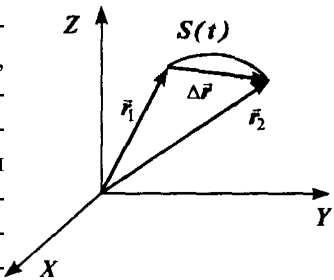
Физические величины обладают свойством размерности. Под размерностью физической величины понимают совокупность параметров, необходимых для ее определения. Другими словами, указать размерность физической величины означает указать, какие измерения нужно произвести, чтобы ее определить. Самые простые физические величины — это длина, время и масса. Они имеют, как говорят, собственные размерности, обозначаемые соответственно буквами L, T и M, потому что для их определения никаких других измерений производить не нужно. Но уже, например, для определения скорости тела необходимо произвести два независимых измерения — длины L и времени T. Поэтому размерность скорости есть отношение L/T. Как мы увидим, размерность физической величины находится с помощью формулы, которая служит ее определением.

Подчеркнем, что размерность физической величины и единицы ее измерения — это разные понятия. Например, скорость может измеряться в см/с, или в м/с, или в км/ч, а размерность ее при этом не меняется — она всегда есть L/T, потому что независимо от того, в каких единицах мы измеряем скорость, мы всегда производим измерения одних и тех же двух параметров — длины L, и времени T. Размерность физической величины представляет ее важнейшее свойство. Часто приходится сравнивать между собой различные величины. Физические величины можно сравнивать, только если они обладают одинаковой размерностью. Например, нельзя сравнивать между собой длину пути и отрезки времени: это бессмысленно — они обладают разной размерностью.

1.1 Кинематика материальной точки.

Одним из основных понятий механики является понятие материальной точки, что означает тело, обладающее массой, размерами которого можно пренебречь при рассмотрении его движения. Движение материальной точки — простейшая задача механики, которая позволит рассмотреть более сложные типы движений.

Перемещение материальной точки происходит в пространстве и изменяется со временем. Реальное пространство трехмерно, и положение материальной точки в любой момент времени полностью определяется тремя числами — ее координатами в выбранной системе отсчета. Число независимых величин, задание которых необходимо для однозначного определения положения тела, называется числом его степеней свободы. В качестве системы координат выберем прямоугольную, или декартову, систему координат. Для описания движения точки, кроме системы координат, необходимо еще иметь устройство, с помощью которого можно измерять различные отрезки времени. Такое устройство назовем часами. Выбранная система координат и связанные с ней часы образуют систему отсчета.



Декартовы координаты X,Y,Z определяют в пространстве радиус-вектор z, острие которого описывает при его изменении со временем траекторию материальной точки. Длина траектории точки представляет собой величину пройденного пути $S(t)$. Путь $S(t)$— скалярная величина. Наряду с величиной пройденного пути, перемещение точки характеризуется направлением, в котором она движется. Разность двух радиус-векторов, взятых в различные моменты времени, образует вектор перемещения точки (рис.).

Для того чтобы характеризовать, как быстро меняется положение точки в пространстве, пользуются понятием скорости. Под средней скоростью движения по траектории за конечное время Δt понимают отношение пройденного за это время конечного пути ΔS ко времени:

$$v_s = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}. \qquad (1.1)$$

Скорость движения точки по траектории — скалярная величина. Наряду с ней можно говорить о средней скорости перемещения точки. Эта скорость — величина, направленная вдоль вектора перемещения,

$$\vec{v}_r = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}. \qquad (1.2)$$

Если моменты времени t_1, и t_2 бесконечно близки, то время Δt бесконечно мало и в этом случае обозначается через dt. За время dt точка проходит бесконечно малое расстояние dS. Их отношение образует мгновенную скорость точки

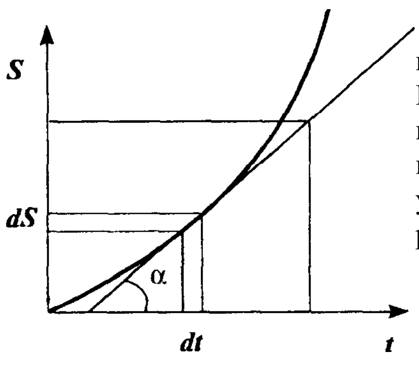
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (1.3)$$

Производная радиус-вектора r по времени определяет мгновенную скорость перемещения точки.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.4)$$

Поскольку перемещение совпадает с бесконечно малым элементом траектории $dr = dS$, то вектор скорости направлен по касательной к траектории, а его величина:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}. \qquad (1.5)$$

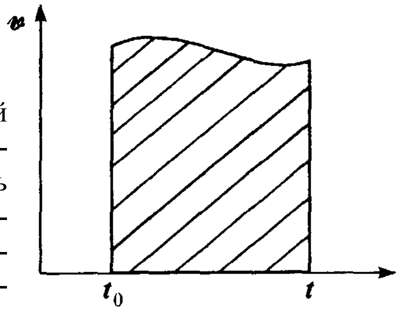


На рис. показана зависимость пройденного пути S от времени t. Вектор скорости $v(t)$ направлен по касательной к кривой $S(t)$ в момент времени t. Из рис. видно, что угол наклона касательной к оси t равен

$$\frac{dS}{dt} = tg\alpha \qquad .$$

Интегрируя выражение (1.5) в интервале времени от t_0 до t, получим формулу, позволяющую вычислить путь, пройденный телом за время t-t_0 если известна зависимость от времени его скорости $v(t)$

$$S = \int_{t_0}^{t} v(t)dt. \qquad (1.6)$$



Геометрический смысл этой формулы ясен из рис. По определению интеграла пройденный путь представляет собой площадь, ограниченную кривой $v = v(t)$ в интервале от t_0 до t.В случае равномерного движения, когда скорость сохраняет свое постоянное значение во все время движения, $v=const$; отсюда следует выражение

$$S = S_0 + v(t - t_0), \qquad (1.7)$$

где S_0 - путь, пройденный к начальному времени t_0.

Производную скорости по времени, которая является второй производной по времени от радиус-вектора, называют ускорением точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.8)$$

Вектор ускорения а направлен вдоль вектора приращения скорости dv. Пусть а = $const$. Этот важный и часто встречаемый случай носит название равноускоренного или равнозамедленного (в зависимости от знака величины а) движения. Проинтегрируем выражение (1.8) в пределах от $t = 0$ до t:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(0) + \vec{a}t, \qquad (1.9)$$

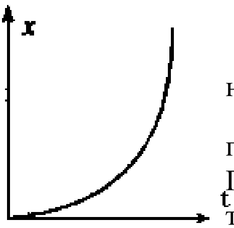
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (1.10)$$

и используем следующие начальные условия:

$\vec{r}(0) = 0; \vec{v}(0) = \vec{v}_0$.

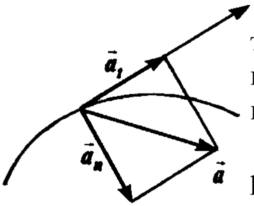
Таким образом, при равноускоренном движении

$$\vec{r}(t) = \vec{v}(0)t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \qquad (1.11)$$



В частности, при одномерном движении, например вдоль оси X, $x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Случай прямолинейного движения изображен на рис. При больших временах зависимость координаты от времени представляет собой параболу.

В общем случае движение точки может быть криволинейным.



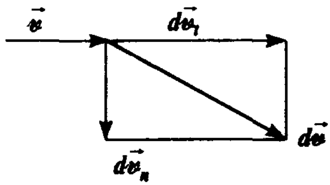
Рассмотрим этот тип движения. Если траектория точки произвольная кривая, то скорость и ускорение точки при ее движении по этой кривой меняются по величине и направлению.

Выберем произвольную точку на траектории. Как всякий вектор, вектор ускорения можно представить в виде суммы его составляющих по двум взаимно перпендикулярным осям. В качестве одной из осей возьмем направление касательной в рассматриваемой точке траектории, тогда другой осью окажется направление нормали к кривой в этой же точке. Составляющая ускорения, направленная по касательной к траектории, носит название **тангенциального ускорения** a_t, а направленная ей перпендикулярно — **нормального ускорения** a_n.

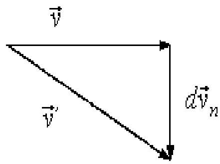
Получим формулы, выражающие величины a_t, и a_n через характеристики движения. Для простоты рассмотрим вместо произвольной криволинейной траектории плоскую кривую. Окончательные формулы остаются справедливыми и в общем случае неплоской траектории.

Благодаря ускорению скорость точки приобретает за время dt малое изменение dv. При этом тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории, зависит только от величины скорости, но не от ее направления.

Это изменение величины скорости равно dv. Поэтому тангенциальное ускорение может быть записано как производная по времени от величины скорости:

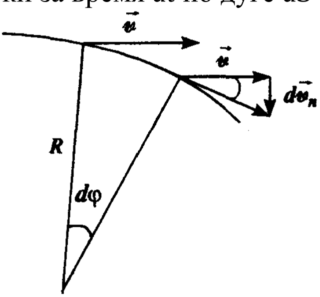


$$a_t = \frac{dv}{dt}. \qquad (1.12)$$



С другой стороны, изменение dv_n, направленное перпендикулярно к v, характеризует только изменение направления вектора скорости, но не его величины. На рис. показано изменение вектора скорости, вызванное действием нормального ускорения. Как видно из рис. $v'^2 = v^2 + (dv_n)^2$, и, таким образом, с точностью до величины второго порядка малости величина скорости остается неизменной $v=v'$.

Найдем величину a_n. Проще всего это сделать, взяв наиболее простой случай криволинейного движения — равномерное движение по окружности. При этом $a_t=0$. Рассмотрим перемещение точки за время dt по дуге dS окружности радиуса R.



Скорости v и v' , как отмечалось, остаются равными по величине. Изображенные на рис. треугольники оказываются, таким образом, подобными (как равнобедренные с равными углами при вершинах). Из подобия треугольников следует $\frac{dv_n}{v} = \frac{dS}{R}$, откуда находим выражение для нормального ускорения:

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v}{R} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{v^2}{R}. \quad (1.13)$$

Формула для полного ускорения при криволинейном движении имеет вид:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (1.14)$$

Подчеркнем, что соотношения (1.12), (1.13) и (1.14) справедливы для всякого криволинейного движения, а не только для движения по окружности. Это связано с тем, что всякий участок криволинейной траектории в достаточно малой окрестности точки можно приближенно заменить дугой окружности. Радиус этой окружности, называемый радиусом кривизны траектории, будет меняться от точки к точке и требует специального вычисления. Таким образом, формула (1.14) остается справедливой и в общем случае пространственной кривой.

1.1.1 Угловая скорость и угловое ускорение.

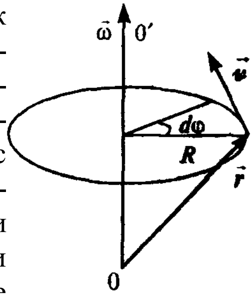
Пройденный путь S , перемещение *dr*, скорость v , тангенциальное и нормальное ускорение a_t, и a_n, представляют собой линейные величины. Для описания криволинейного движения наряду с ними можно пользоваться угловыми величинами.

Рассмотрим более подробно важный и часто встречаемый случай движения по окружности. В этом случае наряду с длиной дуги окружности движение можно характеризовать утлом поворота φ вокруг оси вращения. Величину

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (1.15)$$

называют **угловой скоростью.** Угловая скорость представляет собой вектор, направление которого связывают с направлением оси вращения тела (рис.).

Обратим внимание на то, что, в то время как сам угол поворота φ является скаляром, бесконечно малый поворот $d\varphi$ — векторная величина, направление которой определяется по правилу правой руки, или буравчика, и связано с осью вращения. Если вращение является равномерным, то $\omega=const$ и точка на окружности поворачивается на равные углы вокруг оси вращения за равные времена. Время, за которое



она совершает полный оборот, т.е. поворачивается на угол 2π, называется **периодом движения** T. Выражение (1.15) можно проинтегрировать в пределах от нуля до T и получить **угловую частоту**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.16}$$

Число оборотов в единицу времени есть величина, обратная периоду, — циклическая частота вращения

$$\nu = 1/T. \tag{1.17}$$

Нетрудно получить связь между угловой и линейной скоростью точки. При движении по окружности элемент дуги связан с бесконечно малым поворотом соотношением $dS = R{\cdot}d\varphi$. Подставив его в (1.15), находим

$$v = \omega r. \tag{1.18}$$

Формула (1.18) связывает величины угловой и линейной скоростей. Соотношение, связывающее векторы ω и V, следует из рис. А именно, вектор линейной скорости представляет собой векторное произведение вектора угловой скорости и радиуса-вектора точки r:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,. \tag{1.19}$$

Таким образом, вектор угловой скорости направлен по оси вращения точки и определяется по правилу правой руки или буравчика.

Угловое ускорение — производная по времени от вектора угловой скорости ω (соответственно вторая производная по времени от угла поворота) $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Выразим тангенциальное и нормальное ускорение через угловые скорости и ускорение. Используя связь (1.18),(1.12) и (1.13), получаем

$$a_t = \beta \cdot R,\ a = \omega^2 \cdot R. \qquad (1.20)$$

Таким образом, для полного ускорения имеем

$$a = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}\ . \qquad (1.21)$$

Величина β играет роль тангенциального ускорения: если $\beta = 0$, полное ускорение при вращении точки не равно нулю, $a = R \cdot \omega^2 \neq 0$.

1.2 Законы Ньютона и законы сохранения

При рассмотрении кинематики использовалась неподвижная система отсчета. В природе не существует абсолютного движения, всякое движение имеет относительный характер: либо одного тела относительно другого, либо относительно выбранной системы отсчета. Возникает вопрос, все ли системы отсчета являются равноправными, а если нет, то какие являются предпочтительными. Единственное и естественное требование к системе отсчета состоит в том, что ее выбор не должен вносить усложнения в описание движения тел, т.е. законы движения в выбранной системе отсчета должны иметь наиболее простой вид. В частности, в такой системе должны оставаться неизменными свойства пространства и времени: пространство должно быть однородным и изотропным, а время однородным.

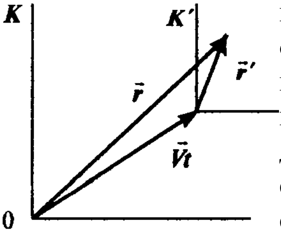
Однородность пространства и времени означает, что наблюдаемые физические свойства и явления должны быть одинаковы в любой точке пространства и в любой момент времени. Не существует выделенных в каком-либо отношении точек пространства и моментов времени.

Изотропность пространства означает, что все направления в пространстве равнозначны. Физические явления в замкнутой системе не должны изменяться при ее повороте в пространстве.

Система отсчета, которая использовалась до сих пор, отвечала этим требованиям, но возникает вопрос, как ее реализовать, т.е. с какими объектами, реально существующими в природе, можно ее связать. Оказывается, что выбор подобной системы отсчета является непростым делом, так как требуемым условиям отвечает специальный класс физических объектов. Если «привязать» неподвижную систему координат к какому-либо произвольно движущемуся объекту, например к вагону поезда, можно заметить, что в данной системе отсчета сразу произойдут странные явления, например груз, подвешенный на нити, будет время от времени отклоняться от вертикали (что связано с действием различных ускорений вагона: при торможении или ускорении и при поворотах). В результате для описания этих явлений в данной системе координат придется прибегнуть к представлениям о взаимодействиях, внешних по отношению к системе, и включить их в рассмотрение. В то же время ясно, что в другой системе координат, не испытывающей указанных ускорений, описание механических явлений будет гораздо проще.

Другой пример не очень подходящей системы отсчета — неподвижная система, связанная с Землей. В этой системе можно, напри мер, обнаружить вращение плоскости колебаний физического маятника (на самом деле связанное с вращением Земли вокруг своей оси), для объяснения которого нам также придется привлекать физические причины, являющиеся посторонними по отношению к данной системе отсчета. Вместе с тем, как показывает опыт, по отношению к Солнцу и звездам маятник будет вести себя стабильно, т.е. Солнце и звезды являются подходящими физическими объектами для выбора указанной системы отсчета.

Как показывает опыт, нужным требованиям удовлетворяют системы отсчета, которые связаны с физическими объектами, не испытывающими внешних воздействий, т.е. не подвергающимися



каким-либо ускорениям. В таких системах отсчета тела находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока на них не действуют другие тела. Свойство тела сохранять такое состояние называется инерцией, и поэтому системы отсчета, о которых "идет речь, носят название инерциальных. Если наряду с выбранной инерциальной системой, рассмотреть другую, движущуюся относительно первой прямолинейно и равномерно, то свободное движение тела в новой системе будет также происходить с постоянной скоростью. Таким образом, существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы законы механики. Не существует никакой абсолютной системы отсчета, которую можно было бы предпочесть другим системам. В этом состоит принцип относительности Галилея. Его можно сформулировать и так: никакими механическими опытами невозможно установить, движется ли данная инерциальная система или покоится: оба состояния эквивалентны. Координаты точки в двух системах отсчета, одна из которых K' движется равномерно и прямолинейно относительно другой (K) со скоростью V, связаны соотношением (рис.)

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t\,. \qquad (1.22)$$

При этом считается, что время абсолютно, т.е. течет одинаково в обеих системах: $t' = t$. Скорость точки в системе К связана со скоростью в системе К' формулой:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}\,. \qquad (1.23)$$

Математически принцип относительности Галилея можно сформулировать как требование инвариантности (неизменности) уравнений механики по отношению к преобразованию (1.23)

1.2.1 Законы Ньютона

Законы Ньютона образуют основу динамики — раздела механики, рассматривающего взаимодействие тел.

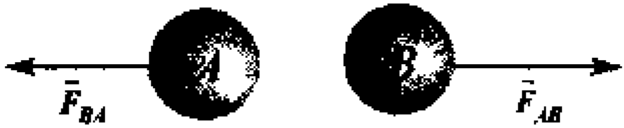
Первый закон Ньютона отражает свойство инерции, тел и часто называется законом инерции. Он утверждает, что всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние. Ясно, во-первых, что этот закон выполняется только в инерциальных системах отсчета. Во-вторых, отсюда следует важное заключение, что, поскольку изменение состояния покоя или равномерного движения связано с наличием в системе ускорения, последнее, в свою очередь, возникает как результат воздействия других тел. Это утверждение создает предпосылки для формулирования второго закона Ньютона.

Воздействие одного физического тела на другое характеризуется физической величиной, называемой силой. Сила, действующая на тело, сообщает ему ускорение. Величина полученного ускорения пропорциональна приложенной силе. Но разные тела под влиянием одинаковых сил приобретают разные ускорения. Данный опытный факт есть проявление уже упоминавшегося свойства инерции тела. Это свойство количественно характеризуется инертной массой тела — коэффициентом пропорциональности между приложенной к телу силой и полученным им ускорением.

Таким образом, второй закон Ньютона может быть записан в форме:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \qquad (2.24)$$

где фигурируют вновь введенные физические величины: вектор силы F и инертная масса тела m. В таком виде его можно сформулировать следующим образом: ускорение, приобретаемое телом, прямо пропорционально силе, действующей на тело, и обратно пропорционально массе тела. Третий закон Ньютона имеет дело со взаимодействующими, телами. Он утверждает, что силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению.



Важно подчеркнуть, что силы, о которых идет речь, приложены к разным взаимодействующим друг с другом телам

1.2.2 Законы сохранения

Запишем уравнение (1.24) в виде

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\ . \qquad (1.25)$$

Выражение (2.25) представляет собой уравнение движения частицы. Если его проинтегрировать, то можно найти траекторию частицы $r = r(t,\ F)$. Однако часто это не является необходимым. Оказывается, уравнения Ньютона обладают тем свойством, что некоторые величины, характеризующие движение частицы, остаются неизменными во все время движения. О таких величинах принято говорить, что они сохраняются. Их также называют интегралами движения. Знание интегралов движения позволяет получить ряд важных следствий без фактического решения уравнений движения. Получим некоторые сохраняющиеся величины.

Перепишем уравнение (1.25) в виде

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\ . \qquad (1.26)$$

Величина $\vec{p} = m\vec{v}$ называется импульсом тела. Внеся величину m под знак дифференциала в (1.26), закон Ньютона можно записать в форме:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\ . \qquad (1.27)$$

Физический смысл импульса становится очевидным, если уравнение (1.27) проинтегрировать на конечном интервале времени от 0 до t:

$$\Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F}dt\,. \qquad (1.28)$$

Изменение импульса служит мерой величины силы, действующей на тело в течение конечного промежутка времени. Численно величина импульса

$$\vec{p} = m\vec{v}\,. \qquad (1.29)$$

Рассмотрим тело или систему тел в отсутствие внешних сил. Система тел, на которую не действуют внешние силы (или векторная сумма этих сил равна нулю), является замкнутой. В этом случае $\boldsymbol{F}$=0; как видно из уравнений (1.26) или (1.27),

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = 0,$$ т.е. величина ,

$$\vec{p} = m\vec{v} = const \qquad (1.30)$$

остается постоянной во все время движения. Полученный результат представляет собой закон сохранения импульса, который имеет место как для одного тела, так и для системы тел в отсутствие внешних сил.

В отсутствие внешних сил сохраняется еще одна скалярная величина. Если умножить уравнение (1.26) одновременно слева и справа на вектор скорости, в левой части окажется производная от полного дифференциала, и уравнение примет вид

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}\,. \qquad (1.31)$$

Пусть F = 0. Тогда постоянной во время движения является величина

$$T = \frac{mv^2}{2}\,. \qquad (1.32)$$

Она называется кинетической энергией частицы. При отсутствии внешних сил, т. е. в замкнутой системе, сохраняется кинетическая энергия как в случае одного тела, так и для системы тел. Когда на частицу действует внешняя сила F, кинетическая энергия не остается постоянной. В этом случае согласно (1.31) приращение кинетической энергии за время dt равно скалярному произведению $\vec{F}d\vec{r}$. Величина $dA = \vec{F}d\vec{r}$ — это работа, совершаемая силой F на пути dr .

Проинтегрируем соотношение (1. 31) вдоль некоторой траектории от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} \ .$$

Левая часть представляет собой приращение кинетической энергии на пути между точками 1 и 2, а величина

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} \qquad (1.33)$$

есть работа силы на пути 1—2.

Таким образом, работа сил, действующих на частицу, расходуется на изменение ее кинетической энергии:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \ . \qquad (1.34)$$

Соответственно, изменение кинетической энергии частицы служит мерой работы, произведенной над частицей.

Если частица в каждой точке пространства подвержена действию других тел, то говорят, что эта частица находится в поле сил. В случае силового поля действие силы распределено по всему пространству. Рассмотрим такое поле сил, действие которого на частицу зависит только от положения частицы в пространстве. Такое поле можно описать с помощью некоторой скалярной функции $\varphi(r)$, зависящей, а соответствии со сказанным, только от координат. Это случай специального, но часто встречаемого в природе потенциального поля, а функция $\varphi(r)$, характеризующая поле, является потенциалом поля. Сила связана с потенциалом в каждой точке соотношением

$$\vec{F} = -const\frac{d\varphi}{d\vec{r}}, \qquad (1.35)$$

где постоянная определяется свойствами частицы, взаимодействующей с полем сил.

Подставим соотношение (1.35) в (1.33) и опять проинтегрируем вдоль траектории от точки 1 до точки 2. Получим

$$T_2 - T_1 + const(\varphi_2 - \varphi_1) = O,$$

т.е. величина $T_2 + const{\cdot}\varphi_2 = T_1 + const{\cdot}\varphi_1$

остается постоянной при движении вдоль траектории. Таким образом, для частицы в потенциальном поле внешней силы сохраняется, т. е. является интегралом движения, величина

$$E = T + const{\cdot}\varphi(r). \qquad (1.36)$$

Величина $U = const{\cdot}\varphi(r)$ называется потенциальной энергией частицы в поле $\varphi(r)$, а выражение (1.36) представляет собой полную механическую энергию частицы

$$E = T + U. \qquad (1.37)$$

1.2.3 Равновесие механической системы

Из выражения (1.37) следует, что при постоянной величине полной энергии кинетическая энергия частицы может возрастать только за счет уменьшения потенциальной энергии. Поэтому, если потенциальная энергия имеет минимальное значение, кинетическая энергия не может измениться без внешнего воздействия. Таким образом, условием механического равновесия системы является минимум ее потенциальной энергии

$$\frac{dU}{d\vec{r}} = 0, \qquad (1.38)$$

что эквивалентно равенству нулю сил, действующих на частицу.

1.3 Движение в гравитационном поле.

В 1687 г. Ньютон на основании уже обнаруженных к тому времени на опыте законов движения планет установил, что всякие два тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной квадрату расстояния между ними. Например, материальная точка с массой m, находящаяся на расстоянии r от другой материальной точки с массой M, будет притягиваться последней с силой

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}, \qquad (1.39)$$

где γ — размерная постоянная, необходимая для того, чтобы величина F имела размерность силы. В случае наличия тел сложной формы, когда их нельзя рассматривать как материальные точки, формула (1.39) видоизменяется, но основной характер взаимодействия сохраняется. Постоянная в уравнении (1.39) была впервые определена в 1798г. английским физиком Кавендишем в поразительном по точности опыте. Ее численное значение очень мало $\gamma = 6.6 \cdot 10^{-11}$н·м^2/кг^2 — это значит, что с силой столь малой величины притягиваются друг к другу две массы в 1кг каждая на расстоянии в 1м. Огромное значение, которое имеют силы гравитации в природе, обусловлено с одной стороны, большими массами небесных тел, а с другой — отсутствием сил иного происхождения.

Соотношение (1.39) носит название закона всемирного тяготения. Оно хорошо описывает движение тяготеющих масс.

С физической точки зрения соотношение (1.39) описывает взаимодействие массы m с полем тяготения, или, как принято говорить, с гравитационным полем, создаваемым в пространстве массой M. Хотя способ передачи гравитационного взаимодействия нам неизвестен, опыт показывает, что с каждой массой в пространстве связано гравитационное поле.

Гравитационное поле, создаваемое в пространстве массой M, будем характеризовать потенциалом

$$\varphi = -\gamma \frac{M}{r}. \qquad (1.40)$$

Потенциальная энергия, приобретенная телом с массой в этом поле, согласно результатам предыдущего раздела, может быть записана в виде

$$U = -\gamma \frac{mM}{r}, \qquad (1.41)$$

т. е. потенциальная энергия поля в гравитационном поле равна потенциалу поля в точке нахождения тела, умноженному на массу тела.

Сила притяжения (1.39) может быть найдена по формуле (1.35):

$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}} = \gamma \cdot m \cdot M \frac{d}{d\vec{r}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\gamma \cdot m \cdot M \frac{\vec{r}}{r^3} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\vec{e}_{\vec{r}} \quad (2.42)$$

($\vec{e}_{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора r).

Зная потенциал поля, можно вычислить работу, совершаемую силами поля над телом с массой т при перемещении его из положения 1 в положение 2. Эта работа может быть выражена через разность значений потенциала поля в указанных точках

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -\int_1^2 \frac{dU}{d\vec{r}} d\vec{r} = U(1) - U(2) = m(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1.43)$$

Отсюда видно, что работа в поле сил тяготения не зависит от пути, т. е. от того, каким образом тело было перемещено из положения 1 в 2.

Массы, фигурирующие в законе всемирного тяготения, характеризуют способность тел создавать поле тяготения и в свою очередь испытывать на себе их действие. Поэтому масса, о которой идет здесь речь, может быть названа тяготеющей, или гравитационной, массой, в отличие от инертной массы, фигурирующей во втором законе Ньютона. Хотя их физический смысл различен и ниоткуда не следует их равенство, тем не менее они все же тождественны. Невозможность различить обе массы является следствием большого числа самых совершенных опытов. Таким образом, во втором законе Ньютона и в законе тяготения проявляются различные свойства одной и той же величины — физической массы.

1.3.1 Движение в поле тяготения Земли.

Из закона всемирного тяготения следует, что у поверхности Земли все тела должны падать с одинаковым ускорением. В самом деле, по второму закону Ньютона ускорение, приобретаемое телом с массой m у поверхности Земли $a = F/m$, где F — сила, с которой тело притягивается земным шаром. По закону тяготения

$$F = \gamma \frac{m \cdot M_З}{R_З^2}, \tag{1.44}$$

$M_З$ — масса Земли и $R_З$ — радиус земного шара. Отсюда

$$a = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}$$

и не зависит от массы падающего тела. Таким образом, все тела у поверхности Земли независимо от их массы падают с одинаковым ускорением

$$g = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}, \tag{1.45}$$

которое называется ускорением свободного падения. Подставляя сюда известные значения констант, получим значение 9,8 м/c^2. В действительности значения g слегка различаются при учете сил сопротивления и реальной формы Земли. По второму закону Ньютона это означает, что в поле тяжести Земли все тела испытывают силу тяжести, равную mg. При перемещении массы с одной высоты на другую эта сила тяжести совершает работу, которую можно вычислить как изменение потенциальной энергии тела.

1.3.2 Космические скорости.

Определим скорость, которую необходимо иметь телу дли того, чтобы оно могло стать спутником Земли, т. е. первую космическую скорость. Величину этой скорости можно определить из условия равенства сил, действующих на тело при его вращении вокруг Земли. Сила притяжения должна быть уравновешена центробежной силой mv^2/R. Таким образом,

$$\frac{mv^2}{R_З} = g \frac{M_З}{R_З^2} \tag{1.46}$$

откуда находим значение первой космической скорости

$$v_1 = \sqrt{g\frac{M_З}{R_З}} = \sqrt{g \cdot R_З}$$

Подставляя численные значения величин, получаем v_1 = 8 км/с.

Вторая космическая скорость — это скорость, которую нужно сообщить телу для того, чтобы оно покинуло область земного притяжения. Для определения второй космической скорости следует вычислить работу, которую необходимо совершить против сил земного притяжения для удаления тела с поверхности Земли на бесконечность. Эта работа равна разности потенциальных энергий тела в начальном и в конечном положениях:

$$A = U_к - U_н.$$

Потенциальная энергия тела в гравитационном поде Земли на ее поверхности согласно (1.41) имеет вид:

$$U_n = -\gamma\frac{mM_З}{R_З}$$

$U_n = -\gamma\dfrac{mM_З}{R_З}$ а на бесконечности равна нулю. Таким образом,

$$A = -\gamma\frac{mM_З}{R_З} = mgR_З \qquad (1.47)$$

Величина этой потенциальной энергии определяет кинетическую энергию, которую должно иметь тело для того, чтобы быть в состоянии совершить указанную работу

$$\frac{mv_{11}^2}{2} = mgR_З.$$

Отсюда вторая космическая скорость определяется выражением:

$$v_{11} = \sqrt{2gR_З} = \sqrt{2} \cdot v_1.$$

Ее численное значение приблизительно 11 км/с. Пусть перемещение происходит вдоль оси Z. При этом сила тяжести совершает работу

$$A = \int_1^2 F dz = mg\,(z_2 - z_1)\,.$$

Согласно определению потенциальной энергии А = U_1-U_2. Отсюда следует, что потенциальная энергия тела в поле силы тяжести Земли может быть записана в виде

$$U(z) = mgz + const, \qquad (1.48)$$

где постоянная связана с выбором начала отсчета энергии. Эту формулу можно получить и непосредственно из закона всемирного тяготения. Запишем его в виде

$$U = -\gamma \frac{mM}{R_З + z} = -\gamma \frac{mM}{R_З\left(1 + \dfrac{z}{R_З}\right)},$$

где z— высота тела с массой m над поверхностью Земли. При малых

$\dfrac{z}{R_З} << 1, \quad \left(1 + \dfrac{z}{R_З}\right)^{-1} \cong 1 - \dfrac{z}{R_З}$, откуда находим $U = U_0 + mgz = U(R_З) + mgz$

1.4. Силы инерции

Основным положением механики Ньютона является утверждение о том, что действие на тело со стороны других тел вызывает их ускорение. В системах координат, движущихся с ускорением относительно выбранной нами инерциальной системы, так называемых неинерциальных системах, формально справедливо и обратное — возникают силы, связанные не с реальным действием других тел, а с наличием указанных ускорений. Такие силы называют силами инерции. Рассмотрим несколько примеров.

1. Прямолинейное движение системы координат с ускорением a_0 относительно инерциальной системы. В этом случае на тело с массой m в неинерциальной системе координат действует сила инерции, равная

$$f_и = -ma_0. \qquad (1.49)$$

2. Центробежная сила инерции. Рассмотрим движение тела во вращающейся системе координат. Сначала рассмотрим вращение тела в неподвижной системе. В ней тело будет испытывать центростремительное ускорение, которое, и будет заставлять его вращаться. По третьему закону Ньютона центростремительной силе соответствует центробежная сила, приложенная к нити, удерживающей вращающееся тело. Во вращающейся системе координат тело покоится, но центростремительное ускорение по-прежнему отлично от нуля. Это ускорение может быть связано теперь с существованием центробежной силы $\frac{mv^2}{R}$, направленной от центра вращения.

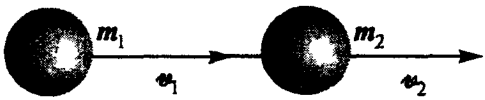
3. Свободно падающий лифт. Пусть ускорение свободно падающего лифта — неинерциальной системы отсчета — g. Сила инерции, действующая на материальную точку с массой m, в системе отсчета, связанной с лифтом, равна mg. На тело в падающем лифте действуют, таким образом, две силы: — сила тяжести и сила инерции. Суммарная сила, действующая в свободно падающем лифте на материальную точку, равна нулю, т. е. сила инерции уравновешивает силу тяготения — в лифте возникает состояние невесомости. Аналогия между поведением тел в гравитационном поле и в неинерциальной системе отсчета составляет принцип эквивалентности сил тяготения и инерции: он используется в теории тяготения, основанной на теории относительности. В основе принципа эквивалентности лежит равенство инертной и гравитационной масс, о котором шла речь в начале данной главы.

1.5. Упругое и неупругое взаимодействия

При взаимодействии тел друг с другом изменяются их энергия и импульс. Это изменение, однако, может происходить по-разному.

Когда речь идет о взаимодействии массивных тел, которые состоят из большого числа частиц, атомов или молекул, имеет смысл наряду с кинетической и потенциальной энергией говорить о внутренней энергии тела. Внутренняя энергия — это энергия всех частиц, составляющих тело, при заданных его температуре и объеме.

В результате взаимодействия тела с другими телами может измениться его температура, а также (необратимым образом) его объем. Ясно, что эти изменения связаны с расходом энергии, т. е. в результате взаимодействия тела с внешними объектами меняется его внутренняя энергия. Такое взаимодействие является неупругим. Оно, очевидно, не сохраняет полной механической энергии тела —суммы кинетической и потенциальной. Напротив, если в результате взаимодействия внутреннее состояние тела не меняется, взаимодействие является упругим. В процессе упругого взаимодействия выполняется закон сохранения механической энергии. Рассмотрим в связи с этими соображениями столкновения двух тел. Столкновение тел заключается в их кратковременном взаимодействии, происходящем при соприкосновении тел. Поскольку вне этого момента времени тела не взаимодействуют, их потенциальная энергия относительно друг друга равна нулю. Взаимодействие при столкновении состоит, таким образом, в передаче от одного тела другому импульса и кинетической энергии. Рассмотрим удар двух шаров, центры которых движутся вдоль одной прямой, т. е. центральный удар. Пусть массы шаров m_1 и m_2, скорости до удара v_1, и v_2, после удара u_1 и u_2. Для определенности возьмем случай движения шаров, изображенный на рис..



Центральный удар шаров

Сначала рассмотрим упругий удар шаров. В применении к данной задаче закон сохранения импульса системы шаров имеет вид:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2, \qquad 1.50)$$

т.е. импульс системы до столкновения равен импульсу системы после столкновения.

Закон сохранения энергии дает

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \qquad (1.51)$$

Перенося члены, относящиеся к первому шару влево, а ко второму шару вправо, и разделив одно из полученных уравнений на другое, находим:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(v_2 - u_2),\ v_1 + u_1 = v_2 + u_2.$$

Решая полученную систему уравнений совместно, получаем:

$$u_1 = [(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2]/(m_1 + m_2), \qquad (1.52)$$

$$u_2 = [(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1]/(m_1 + m_2). \qquad (1.53)$$

Исследуем полученный результат в частных случаях.

1. Соударение одинаковых шаров. Тогда $m_1 = m_2$ и

$$u_1 = v_2,\ u_2 = v_1. \qquad (1.54)$$

т. е. при упругом центральном ударе двух тел одинаковой массы они просто обмениваются скоростями. Если, в частности, до удара второй шар покоился ($v_2 = 0$), то после удара остановится первый шар ($u_1 = 0$), а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался до удара первый шар ($u_2 = v_1$,).

2. Удар шара о массивную стенку. В этом случае $m_2 >> m_1$ и приближенно будем иметь:

$$u_1 \cong -v_1 + 2v_2 \qquad (1.55)$$

$$u_2 \cong v + 2\frac{m_1}{m_2}v_1 \cong v_2.$$

Как видно отсюда, скорость массивного тела после удара меняется незначительно. В результате удара стенке передается значительный импульс, но передача энергии при ударе сравнительно мала:

$$\Delta p = m_2 u_2 + m_2 v_2 = 2m_1 v_1.$$

Если стенка была первоначально неподвижна ($v_2 = 0$), то упруго ударившийся о нее шарик малой массы отскочит обратно практически с теми же скоростью ($u_1 = - v_1$) и энергией.

При ударе о движущуюся стенку происходит обмен энергией между стенкой и шариком тем больший, чем больше скорость стенки. В зависимости от направления движения стенки (v_2 больше или меньше 0) шарик отскакивает от стенки с большими или меньшими, чем до столкновения, кинетической энергией и импульсом.

Рассмотрим теперь абсолютно неупругий удар шаров. При таком ударе энергия налетающего шара полностью расходуется на изменение внутренней энергии другого шара и на сообщение ему некоторой скорости . Закон сохранения механической энергии не выполняется, и для определения скорости после удара достаточно закона сохранения импульса.

$$m_1v_1 + m_2v_2 =(m_1 + m_2)u_1, \qquad (1.56)$$

откуда

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \qquad (1.57)$$

Потеря механической энергии, перешедшей во внутреннюю энергию шаров, равна разности энергий до и после удара:

$$\Delta E = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \qquad (1.58)$$

Подставляя сюда (1.57), находим

$$\Delta E = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \qquad (1.59)$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2 = 0$), то

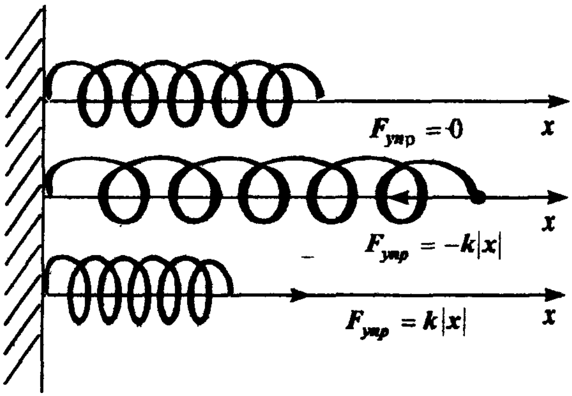
$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1 \qquad (1.60)$$

$$\Delta E = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1v_1^2}{2} \qquad 1.61)$$

Когда неподвижное тело имеет большую массу ($m_2 > m_1$), то почти вся кинетическая энергия переходит при ударе во внутреннюю анергию. Напротив, при $m_1 >> m_2$ изменение внутренней энергии мало и большая часть кинетической энергии идет на сообщение движения ударяемому телу.

1.6. Сила упругости

В законе Ньютона сила есть физическая величина, характеризующая действие одного тела на другое и сообщающая последнему ускорение. Сила может также приводить к изменению формы и объема тела. В этом случае происходит деформация тела. Что происходит в действительности при приложении силы — ускорение тела или его деформация — определяется самими свойствами тела. Более того, свойства тела определяют и характер деформации, которая может быть упругой и неупругой. Неупругая деформация характеризуется тем, что она не исчезает после снятия нагрузки. С неупругой деформацией связано изменение внутренней энергии тела. Напротив, если после снятия нагрузки деформация исчезает и тело возвращается к своей прежней форме, то деформация является упругой. Сила, возвращающая тело к своей прежней форме, — упругая сила. Как показывает опыт, упругая сила пропорциональна созданной в теле деформации. Соответствующий закон называется законом Гука:



$$F = -k\,x, \qquad (1.62)$$

где k— коэффициент пропорциональности, а x — величина деформации тела (рис.): $x > 0$ при растяжении тела, $x < 0$ — при сжатии.

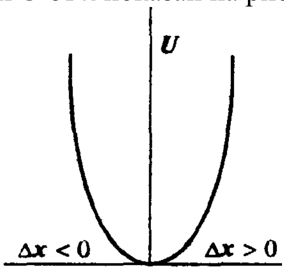
Вычислим работу, совершаемую против упругой силы, при деформации одномерного стержня на dx:

$$dA = Fdx = kd\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad (1.63)$$

Эта работа идет на изменение взаимного расположения отдельных частей тела, т. е. на изменение его потенциальной энергии. Следовательно, зависимость потенциальной энергии стержня имеет вид:

$$U(x) = \int dA = k\frac{x^2}{2}. \qquad (1.64)$$

График зависимости U от x показан на рис.



1.7. Сила трения

Наряду с силами тяготения и упругими силами существуют силы, обусловленные молекулярными взаимодействиями между соприкасающимися поверхностями тел и зависящие от их скоростей. Опыт показывает, что сила трения, действующая на тело, направлена в сторону, противоположную его скорости. Поэтому работа сил трения всегда отрицательна:

$$dA = \boldsymbol{F}_{TP}\cdot dr = \boldsymbol{F}_{TP}\cdot\boldsymbol{v}\cdot dt = -F_{TP}\cdot v\cdot dt = -F_{TP}\cdot dr. \qquad (1.65)$$

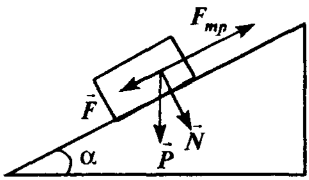
Следовательно, при наличии в системе сил трения полная механическая энергия системы уменьшается, переходя в другие формы энергии, а силы, приводящие к потере (диссипации) энергии, называются диссипативными. Таким образом, силы трения являются диссипативными силами. При наличии силы трения закон Ньютона приобретает вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{F} + \vec{F}_{TP})/m \qquad (1.66),$$

откуда

$$\vec{v} = \int \frac{(\vec{F} + \vec{F}_{TP})dt}{m} + \vec{v}_0 \qquad (1.67)$$

Если сила трения уравновешивает внешнюю силу, то тело будет двигаться равномерно и прямолинейно. Примером является свободное падение тела с учетом сопротивления воздуха, которое происходит с постоянной скоростью, зависящей от формы и размеров тела.



Рассмотрим трение скольжения (рис.). Силу тяжести P можно разложить на две составляющие F и N, соответственно параллельно и перпендикулярно направлению скольжения. Сила N , прижимающая тело к поверхности, увеличивает взаимодействие между трущимися поверхностями. Сила трения скольжения противоположна направлению силы , заставляющей тело скользить. В то время как сила $F = P \sin a$, сила трения

$$F_{TP} = \mu \cdot N = \mu \cdot P \cdot cos\alpha. \qquad (1.68)$$

где μ — коэффициент трения, зависящий от формы и состояния соприкасающихся поверхностей, а также от скорости движения.

1.8. Центр инерции

Импульс замкнутой механической системы имеет различные значения по отношению к различным инерциальным системам отсчета. Если система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью V, то скорости частиц v'_α и v_α в этих системах связаны соотношением $v_\alpha = v'_\alpha + V$. Поэтому связь между значениями P и P' импульса в этих системах дается формулой:

$$\vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}'_\alpha + \vec{V} \sum_\alpha m_\alpha \qquad (1.69)$$

или

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{V} \sum_\alpha m_\alpha \qquad (1.70)$$

Всегда можно подобрать такую систему отсчета K', в которой полный импульс обращается в нуль. Положив $P'=0$, находим, что скорость этой системы отсчета

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum m_\alpha} = \sum m_\alpha \vec{v}_\alpha \Big/ \sum m_\alpha \,. \tag{1.71}$$

Если полный импульс механической системы равен нулю, то говорят, что она покоится относительно соответствующей системы координат. Скорость V имеет смысл скорости движения механической системы как целого с отличным от нуля импульсом. Связь между импульсом P и скоростью V системы как целого такая же, какая была бы между импульсом и скоростью одной материальной точки с массой, равной сумме масс в системе, $M = \sum m_\alpha$.

Правая сторона формулы (1.71) может быть представлена как полная производная по времени от выражения:

$$\vec{R} = \sum m_\alpha \vec{r}_\alpha \Big/ \sum m_\alpha \tag{1.72}$$

Можно сказать, что скорость V системы как целого есть скорость перемещения в пространстве точки, радиус-вектор которой дается формулой (1.72). Такая точка является центром инерции системы.

Закон сохранения импульса замкнутой системы можно сформулировать как утверждение о том, что ее центр инерции движется прямолинейно и равномерно. Это есть обобщение закона инерции для свободной материальной точки.

Энергию покоящейся как целое механической системы обычно называют ее внутренней энергией $E_{вн}$. Она состоит из кинетической энергии движения частиц относительно друг друга и потенциальной энергии их взаимодействия. Полная же энергия системы, движущейся как целое со скоростью V,

$$E = \frac{MV^2}{2} + E_{вн} \tag{1.73}$$

1.9. Момент импульса. Момент силы

Мы видели, что механические свойства замкнутой системы не изменяются при ее параллельном переносе в пространстве. Это свойство является следствием однородности пространства, то есть отсутствием каких-либо выделенных точек пространства, физические свойства системы не должны изменяться также и при ее поворотах в пространстве, ввиду отсутствия в пространстве выделенных направлений, что означает изотропность пространства. Оказывается, что неизменность физических свойств системы при ее поворотах в пространстве также приводит к сохранению некоторой новой механической величины — момента импульса системы.

Рассмотрим систему, состоящую из двух взаимодействующих частиц, на которую действуют также внешние силы. Уравнения движения частиц имеют вид:

$$m_1\dot{\vec{v}}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1, \qquad m_2\dot{\vec{v}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2 \qquad 1.74$$

Умножим первое уравнение векторно слева на r_1, а второе на r_2.

$$\begin{aligned} m_1(\vec{r}_1 \times \dot{\vec{v}}_1) &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1\vec{F}_1 \\ m_2(\vec{r}_2 \times \dot{\vec{v}}_2) &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2\vec{F}_2 \end{aligned} \qquad 1.75$$

Поскольку $\dfrac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \dot{\vec{v}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{v} = \vec{r} \times \dot{\vec{v}}$, т.к.

$\dot{\vec{r}} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v} = 0$ и $F_{12} = - F_{21}$,

получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r_1 \times \vec{P}_1) &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \\ \frac{d}{dt}(r_2 \times \vec{P}_2) &= -\vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \end{aligned} \qquad 1.76.$$

Сложим полученные уравнения:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{P}_1) = \left[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}\right] + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 .$$

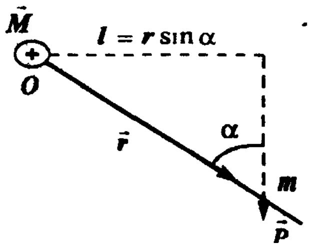
Векторы r_1 - r_2 и F_{12} коллениарны, поэтому

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{P}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2. \qquad 1.77.$$

Если система замкнута F=0 и $\vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 = const$. Еще одна сохраняющаяся величина, которую называют моментом импульса.

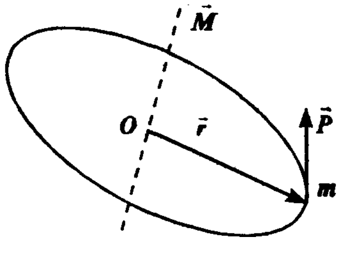
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{P} \qquad 1.78$$

Примеры:



Момент импульса материальной точки, движущейся по прямой, относительно оси О. Направление момента перпендикулярно плоскости рисунка, а его модуль равен:

$$M = mv\ell$$



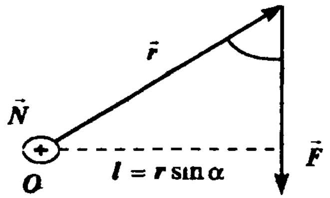
Момент импульса точки, движущейся по окружности. Направление момента перпендикулярно плоскости окружности, а модуль:

$$M = mvr$$

Моментом силы называют

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad 1.79$$

Момент силы. относительно точки O.

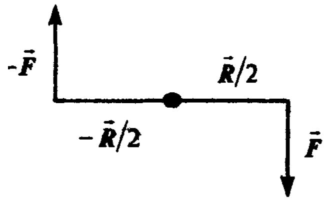


Из рисунка видно, что модуль момента силы равен:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad N = r \cdot F \cdot sin\alpha = F \cdot \ell \qquad 1.80.$$

где $\ell = r\sin\alpha$ — плечо силы относительно точки *O,* — длина перпендикуляра, опущенного из точки *O* на прямую, вдоль которой действует сила.

Пара сил.



Две равные по величине и противоположно направленные силы могут образовать пару сил. Ее момент

$$\vec{N} = 2 \cdot \frac{\vec{R}}{2} \times \vec{F} = \vec{R} \times \vec{F} \ ; \ N = R \cdot F \cdot sin\alpha. \qquad 1.81$$

Продифференцируем 1.78 по времени:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} \qquad 1.82$$

Здесь $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$ и $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.

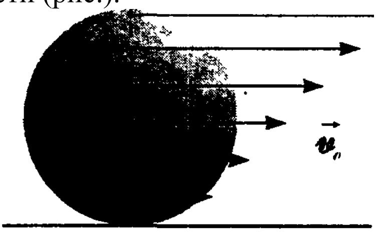
Таким образом, изменение момента импульса возникает вследствие приложения момента силы. Уравнение

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$$

представляет собой основное уравнение динамики вращательного движения.

1.10. Вращательное движение твердого тела

Твердое тело — это система материальных точек, расстояние между которыми остается неизменным при взаимодействии системы с другими телами. Движение твердого тела бывает поступательным и вращательным. Всякое движение твердого тела можно представить как сумму движения названных двух типов. Покажем это для случая плоского движения, т. е. такого, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. В качестве примера плоского движения возьмем качение цилиндра по плоскости (рис.).



Качение цилиндра по плоскости. Стрелками обозначены линейные скорости различных точек цилиндра.

Скорость каждой точки цилиндра может быть представлена в виде:

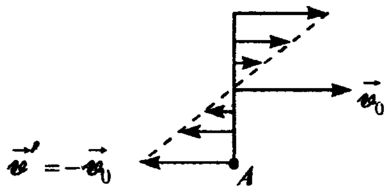
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

где v_0 — скорость поступательного движения, одинаковая для всех точек тела, а v' линейная скорость точки, обусловленная вращением тела и разная для разных точек тела. Линейная скорость точки с радиусом-вектором r $\quad \vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Таким образом, скорость точки при сложном движении тела имеет вид:

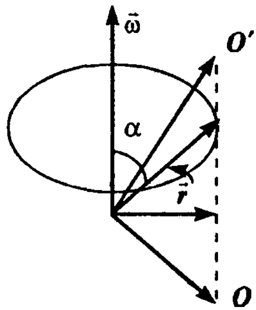
$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} . \quad (1.83)$$

Отсюда следует, что существуют точки, суммарная скорость которых равна нулю относительно неподвижной системы отсчета (рис.). Скорость точки А цилиндра равна нулю относительно неподвижной системы отсчета



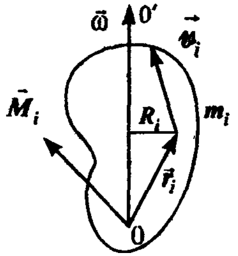
Геометрическое место точек, неподвижных в каждый рассматриваемый момент времени, образует прямую, которая является мгновенной осью вращения (рис.).

Проекции всех векторов r, лежащих на прямой 00', одинаковы. Прямая. 00' образует мгновенную ось вращения цилиндра.



В случае цилиндра, перемещающегося по плоскости, мгновенная ось совпадает с линией касания цилиндра плоскости. Видно, что мгновенная ось вращения не остается постоянной, а перемещается по мере движения тела. Скорости всех точек тела в каждый момент времени можно считать обусловленными вращением вокруг соответствующей мгновенной оси. Таким образом, плоское движение твердого тела можно рассматривать как ряд последовательных вращении вокруг мгновенных осей. В общем случае движение тела можно представлять как вращение вокруг мгновенной оси и одновременно поступательное движение вдоль этой же оси.

1.10.1 Момент инерции твердого тела



Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться относительно некоторой оси (рис.). Момент импульса i-й точки тела относительно этой оси определяется формулой:

$$\vec{M}_i = m_i\left(\vec{r}_i \times \vec{v}_i\right). \qquad (1.84)$$

Выражая линейную скорость точки через угловую скорость тела и используя свойства векторного произведения, получим

$$\vec{M}_i = m_i\left(\vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\right) = m_i\left(\vec{\omega}\vec{r}_i^{\,2} - \vec{r}_i\left(\vec{\omega}\vec{r}_i\right)\right) \qquad (1.85)$$

Спроектируем момент импульса на ось вращения: — эта проекция определяет момент относительно этой оси. Получим

$$M_{iz} = m_i\left(r_i^2 - z_i^2\right)\omega = m_i R_i^2 \omega\,. \qquad (1.86)$$

где z_i,- координата i—точки вдоль оси Z, *а* R_i, — расстояние точки от оси вращения. Суммируя по всем частицам тела, получим момент импульса всего тела относительно оси вращения:

$$M_z = \sum_i M_{iz} = \sum_i m_i R_i^2 \omega\,. \qquad (1.87)$$

Величина

$$J = \sum m_i R_i^2 \qquad (1.88)$$

является моментом инерции тела относительно оси вращения. Момент импульса тела относительно данной оси вращения принимает, таким образом, вид:

$$M_z = J\cdot\omega. \qquad (1.89)$$

Полученная формула аналогична формуле $P_z = mV_z$ для поступательного движения. Роль массы играет момент инерции, роль линейной скорости — угловая скорость. Подставив выражение (1.89) в уравнение для момента импульса (1.78), получим

$$J\cdot\beta_z = N_z. \qquad (1.90)$$

где β_z. — проекция на ось вращения углового ускорения

$\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$. Это уравнение эквивалентно по форме второму закону Ньютона.

В общем случае несимметричного тела вектор M не совпадает по направлению с осью вращения тела и поворачивается вокруг этой оси вместе с телом, описывая конус. Из соображений симметрии ясно что для однородного тела, симметричного относительно оси вращения, момент импульса относительно точки, лежащей на оси вращения, совпадает с направлением оси вращения. В этом случае имеет место соотношение:

$$\vec{M} = J\vec{\omega}. \qquad (1.91)$$

Из выражения (1.91) следует, что при равенстве нулю момента внешних сил произведение $J\omega$ остается постоянным $J\omega = const$ и изменение момента инерции влечет за собой соответствующее изменение угловой скорости вращения тела. Этим объясняется известное явление, состоящее в том, что человек, стоящий на вертящейся скамье, разводя руки в стороны либо прижимая их к туловищу, изменяет частоту вращения.

Из полученных выше выражений ясно, что момент инерции является такой же характеристикой свойства инерции макроскопического тела в отношении вращательного движения, как инертная масса материальной точки в отношении поступательного движения. Из выражения (1.88) следует, что момент инерции вычисляется путем суммирования по всем частицам тела. В случае непрерывного распределения массы тела по его объему естественно перейти от суммирования к интегрированию, вводя плотность тела. Если тело однородно, то плотность определяется отношением массы к объему тела:

$$\rho = \frac{m}{V}. \qquad (1.92)$$

Для тела с неравномерно распределенной массой плотность тела в некоторой точке определяется производной

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \qquad (1.93)$$

Момент инерции представим в виде:

$$J = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{\Delta V_i} r_i^2 \Delta V_i \,, \qquad (1.94)$$

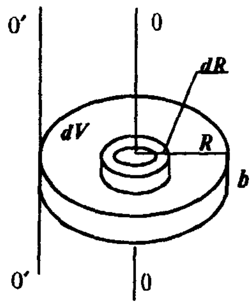
где ΔV — микроскопический объем, занимаемый точечной массой.

Поскольку твердое тело состоит из большого числа частиц, практически непрерывно заполняющих весь занимаемый телом объем, в выражении (1.94) микроскопический объем можно считать бесконечно малым, в то же время полагая, что точечная масса «размазана» по этому объему. Фактически мы производим сейчас переход от модели точечного распределения масс к модели сплошной среды, какой в действительности и является твердое тело благодаря большой его плотности. Произведенный переход позволяет в формуле (2.94) заменить суммирование по отдельным частицам интегрированием по всему объему тела:

$$J = \int \rho(r) r^2 dV \,. \qquad (1.95)$$

Здесь величины ρ и r являются функциями точки, например, ее декартовых координат.

Формула (1.95) позволяет вычислять моменты инерции тел любой формы. Вычислим в качестве примера момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр (рис.).



Поскольку диск однороден, плотность можно вынести из-под знака интеграла. Элемент объема диска $dV = 2\pi r \cdot b \cdot dr$, где b— толщина диска. Таким образом,

$$J = \rho \int r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 2\pi r \cdot b \cdot dr = 2\pi b \rho \frac{R^4}{4} \,, \qquad (1.96)$$

где R — радиус диска. Введя массу диска, равную произведению плотности на объем диска $\pi \cdot R^2\ b$, получим:

$$J = \frac{mR^2}{2}. \qquad (1.97)$$

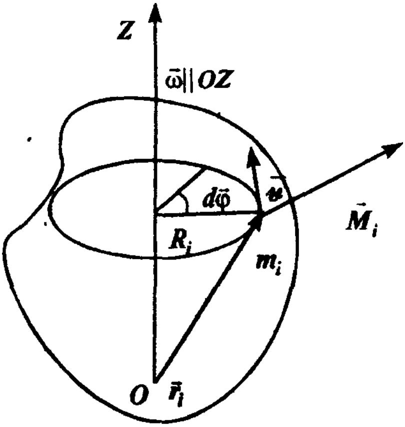
Нахождение момента инерции диска в рассмотренном примере облегчалось тем, что тело было однородным и симметричным, а момент инерции вычислялся относительно оси симметрии тела. В общем случае вращения тела произвольной формы вокруг произвольной оси, вычисление момента инерции может быть произведено с помощью теоремы Штейнера: момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$J=J_0+ma^2. \qquad (1.98)$$

Например, момент инерции диска относительно оси O' в соответствии с теоремой Штейнера:

$$J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \qquad (1.99)$$

1.10.2. Кинетическая энергия твердого тела при вращении.



Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси, которую назовем осью Z (рис.). Линейная скорость точки с массой m_i, равна $v_i = \omega R$, где R, — расстояние точки до оси Z. Для кинетической энергии i-й материальной точки тела получаем выражение:

$$T_i = \frac{mv_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2$$

.

Полная кинетическая энергия тела

$$T = \sum T_i = \omega^2 \frac{1}{2} \sum m_i R_i^2 .$$

Поскольку входящая сюда сумма представляет собой момент инерции относительно оси Z, получаем:

$$T = \frac{1}{2} J\omega^2 \qquad (1.100)$$

Вычислим работу, совершаемую внешней силой при вращении твердого тела. Элемент работы

$$dA = \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \vec{f}\left[d\vec{\varphi} \times \vec{r}\right] = d\varphi\left[\vec{r} \times \vec{f}\right].$$

Последнее выражение есть момент внешней силы N , таким образом,

$$dA = \vec{N} d\vec{\varphi} = \vec{N}\vec{\omega} dt . \qquad (1.101)$$

Полная работа может быть вычислена с помощью следующих формул:

$$A = \int dA = \int_0^{\varphi} \vec{N} d\vec{\varphi} = \int_0^{t} \vec{N}\vec{\omega} dt . \qquad (1.202)$$

Приведем в заключение формулу, описывающую кинетическую энергию тела, совершающего плоское движение — поступательное, со скоростью V_c и вращение с частотой ω):

$$T_{пл} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \qquad (1.103)$$

Кинетическая энергия при плоском движении слагается из энергии поступательного движения со скоростью центра инерции тела и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр инерции.

1.11. Релятивистская механика

Механика Ньютона, или, как говорят, классическая механика, основана на принципе относительности Галилея, согласно которому все законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Математически принцип относительности в классической механике выражается с помощью преобразования Галилея — закона сложения скоростей при переходах от одной инерциальной системы отсчета к другой. Согласно этому закону скорость тела в неподвижной системе отсчета представляет собой сумму скорости тела по отношению к движущейся системе отсчета и скорости самой системы отсчета по отношению к неподвижной. Для всех наблюдаемых движений в природе, скорости которых малы по сравнению со скоростью света, этот закон выполняется с точностью, которая не давала оснований сомневаться в его справедливости вплоть до конца 19-го столетия.

Измерения скорости света, проведенные с большой точностью в конце 19-го века, показали, однако, что закон сложения скоростей Галилея не выполняется для световых лучей. Скорость света, измеренная в движущейся системе координат, оказалась в точности такой же, как и для неподвижной системы отсчета. Таким образом, был установлен экспериментальный факт независимости скорости света от скорости движения источников либо приемников света. Другими словами, было установлено, что скорость света является абсолютной постоянной величиной, равной скорости света в пустоте с. Этот факт невозможно совместить с принципом относительности Галилея.

Возникшее противоречие в классической механике привело А. Эйнштейна к необходимости допустить, что классическая механика справедлива лишь для скоростей малых по сравнению со скоростью света. При скоростях движения, сравнимых со скоростью света, справедлива созданная А. Эйнштейном механика специальной теории относительности, или, как ее называют, релятивистская механика. Если в релятивистской механике скорость света устремить к бесконечности, мы получим механику Ньютона.

Принцип относительности Эйнштейна состоит в том, что не только законы механики, но и вообще все физические законы должны не зависеть от выбранной инерциальной системы отсчета. Поскольку распространение света представляет собой физический процесс, его скорость в пустоте должна быть неизменной в эквивалентных системах координат.

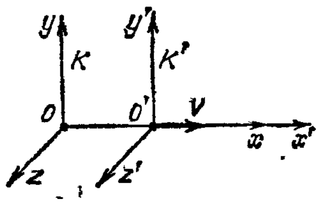
Предположение об абсолютности скорости света приводит к целому ряду следствий, необычных и не наблюдаемых в условиях механики Ньютона. Одно из следствие постоянства скорости света состоит в отказе от абсолютного характера времени, который был привит в механике Ньютона. Нужно теперь допустить, что время течет по-разному в разных системах отсчета — события, одновременные в одной системе, окажутся неодновременными в другой.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K', движущиеся относительно друг друга. Пусть в темной комнате, движущейся с системой K', вспыхивает лампа. Поскольку скорость света в системе K' равна (как и во всякой системе отсчета) c, то свет достигает обеих противоположных стен комнаты одновременно. Не то будет происходить с точки зрения наблюдателя в системе K. Скорость света в системе K также равна c, но так как стены комнаты движутся по отношению к системе K, то наблюдатель в системе K обнаружит, что свет коснется одной из стен раньше, чем другой, т.е. в системе K эти события являются неодновременными.

Таким образом, в механике Эйнштейна относительны не только свойства пространства, но и свойства времени.

1.11.1. Преобразование Лоренца.

Пусть имеются инерциальные системы отсчета K и K', показанные на рис. На рисунке предполагается, что движется система K', в то время как система K неподвижна. С таким же правом можно считать, что неподвижна система K', а система K движется относительно нее со скоростью —V.



Предположим, что происходит какое-то событие. В системе K. оно характеризуется значениями координат и времени x, у, z, t; в системе K'— значениями координат и времени x', y', z', t'. Найдем формулы связывающие нештрихованные значения со штрихованными. Из однородности пространства и времени следует, что эти формулы должны быть линейными.

При показанном на рис. направлении координатных осей плоскость $y' = 0$ совпадает с плоскостью $y = 0$, а плоскость $z' = 0$ совпадает с плоскостью $z = 0$. Отсюда вытекает, что, например, координаты y и y' должны обращаться в нуль одновременно, независимо от значений других координат и времени. Это возможно лишь при условии, что

$$y = \alpha \cdot y',$$

где вследствие линейности уравнения α - постоянная величина. Ввиду равноправности систем K и K' обратное преобразование должно иметь вид $y' = \alpha \cdot y$ с тем же значением α, что и при прямом преобразовании. Перемножив оба соотношения, найдем, что $\alpha^2 = 1$, откуда $\alpha = \pm 1$. Для одинаково направленных осей нужно взять $\alpha = +1$. В результате находим, что

$$y = y' \text{ или } y' = y. \qquad (1.104)$$

Аналогичным образом получается формула

$$z = z' \text{ или } z' = z. \qquad (1.105)$$

Из этих формул вытекает, что значения y и z не зависят от x' и t', откуда следует, что значения x' и t' не могут зависеть от y и t; соответственно значения x и t не могут зависеть от y' и z'. Это означает, что x и t являются линейными функциями только x' и t'.

Из рис. следует, что точка O имеет координату $x = O$ в системе K и $x' = —Vt'$ в системе K'. Следовательно, выражение $x' + Vt'$ должно обращаться в нуль одновременно с координатой x (когда $x' + Vt'$ равно нулю, $x' = —Vt'$). Для этого линейное преобразование должно иметь вид

$$x = \gamma(x' + Vt'), \qquad (1.106)$$

где γ — константа. Точка O имеет координату $x' = 0$ в системе K' и $x = V{\cdot}t$ в системе K. Следовательно, выражение $x — V{\cdot}t$ должно обращаться в нуль одновременно с координатой x' (когда $x — V{\cdot}t = 0$, то $x = V{\cdot}t$). Для этого нужно, чтобы выполнялось соотношение

$$x' = \gamma(x - Vt). \qquad (1.107)$$

В силу равноправности систем K и K' коэффициент γ в обоих случаях должен быть один и тот же.

Теперь воспользуемся принципом постоянства скорости света. Начнем отсчет времени в обеих системах с того момента, когда начала координат O и O' совпадают. Предположим, что в момент $t = t' = 0$ в направлении осей x и x' посылается световой сигнал, который производит вспышку света на экране. Это событие (вспышка) характеризуется в системе K координатой x и временем t, а в системе K'— координатой x' и временем t', причем

$$x = ct, \quad x' = ct'.$$

(скорость c в обоих случаях одна и та же). Подставив эти значения x и x' в формулы, получим соотношения

$$ct = \gamma(ct' + Vt') = \gamma(c + V)t',$$
$$ct' = \gamma(ct - Vt) = \gamma\,(c - V)t.$$

Перемножив эти соотношения и сократив обе части получившегося равенства на tt', придем к уравнению

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - V^2).$$

Отсюда

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (1.108)$$

где $\beta = V/c$. (1.109)

Подстановка найденного значения у в (1.106) и (1.107) приводит к формулам

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.110)$$

Чтобы найти формулы преобразования времени, исключим из формул (1.110) координату x и разрешим получившееся уравнение относительно t. Затем исключим из формул (1.110) координату x' и разрешим получившееся уравнение относительно t'. В результате придем к формулам

$$t=\frac{t'+(V/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t'=\frac{t-(V/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1.111)$$

Напишем вместе формулы (1.104), (1.105), (1.110) и (1.111), подразделив их на две группы:

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}},\ y=y,\ z=z',\quad t=\frac{t'+(V/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (1.112)$$

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\ y'=y,\ z'=z,\quad t'=\frac{t-(V/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}. (1.113)$$

Эти формулы называются **преобразованиями Лоренца**. По формулам (1.112) осуществляется переход от системы K' к системе K', по формулам (1.113)—переход от системы K к системе K'- Вследствие равноправности систем преобразования (1.112) и (1.113) отличаются лишь знаком перед V. Это отличие обусловлено тем, что система K' движется относительно системы K со скоростью V, в то время как система K движется относительно системы K' со скоростью — V.

В преобразованиях Лоренца «перемешаны» координаты и время. Например, время t в системе K определяется не только временем t' в системе K', но также и координатой x'. В этом проявляется взаимосвязь пространства и времени.

В пределе при $V<<c$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Таким образом, различие в течение времени в разных инерциальных системах отсчета обусловлено существо-

ванием предельной скорости распространения взаимодействий. При скоростях много меньших скорости света (т. е. при $\beta \ll 1$) преобразования Лоренца практически не отличаются от преобразований Галилея. Следовательно, преобразования Галилея сохраняют значение для скоростей, малых по сравнению со скоростью света.

При $V > c$ выражения для x, t, x' и t' в формулах (1.112) и (1.113) становятся мнимыми. В этом проявляется то обстоятельство, что движение со скоростями, большими с, невозможно. Невозможна даже система отсчета, движущаяся со скоростью с, потому что при $V = c$ знаменатели формул для x и t обращаются в нуль.

Преобразованиям Лоренца можно придать симметричный вид, если написать их для x и ct, т. е. для величин одинаковой размерности. В этом случае формулы преобразований выглядят следующим образом:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \; y = y, \; z = z', \; (ct) = \frac{ct' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (1.114)$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \; y' = y, \; z' = z, \; (ct') = \frac{ct - (V/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (1.115)$$

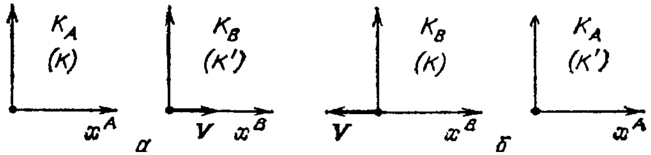
Формулы для x и ct, а также для x' и ct' отличаются друг от друга только перестановкой соответствующих переменных.

1.11.2 Следствия из преобразований Лоренца

Из преобразований Лоренца можно получить следствия, казалось бы, противоречащие нашему повседневному опыту. Это противоречие обусловлено тем, что наш опыт относится к процессам, протекающим со скоростями, весьма малыми по сравнению со скоростью света, и поэтому явления, которые мы сейчас рассмотрим, нами не ощущаются. Однако они с несомненностью присущи миру элементарных частиц, в котором движение со скоростями, близкими к c, представляет собой заурядное явление.

Относительность понятия одновременности.

Рассмотрим инерциальные системы отсчета K_A и K_B.



а — Система K_B движется относительно системы K_A вправо; следовательно, K_A играет роль системы K, а K_B — роль системы K', *б* — Система K_B движется относительно системы K_A влево; это равнозначно тому, что K_A движется относительно K_B вправо; следовательно, K_A играет роль системы K', а K_B — роль системы K.

Предположим, что в системе K_A в точках с координатами x_1^A и x_2^A ($x_2^A > x_1^A$) происходят в момент времени t^A два одновременных события. Найдем разность моментов времени t_2^B и t_1^B, в которые будут зарегистрированы эти события в системе K_B.

Если система K_B движется относительно K_A вправо (рис.*а*), то, применяя преобразования Лоренца, K_A нужно считать системой K, а K_B—системой K' и пользоваться для вычисления моментов времени t_1^B и t_2^B формулами (111). В этом случае

$$t_1^B = \frac{t^A - (V/c^2)x_1^A}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2^B = \frac{t^A - (V/c^2)x_2^A}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Соответственно

$$t_2^B - t_1^A = \frac{-(V/c^2)(x_2^A - x_1^A)}{\sqrt{1-\beta^2}} < 0 .$$

Если же система K_B движется относительно K_A влево (рис.б), то K_A нужно считать системой K', а K_B—системой K и пользоваться другой формулой. В этом случае

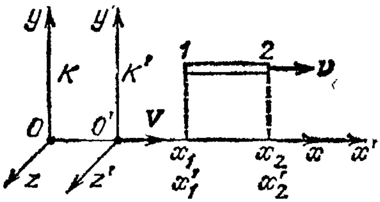
$$t_1^B = \frac{t^A + (V/c^2)x_1^A}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t_2^B = \frac{t^A + (V/c^2)x_2^A}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

$$t_2^B - t_1^A = \frac{(V/c^2)(x_2^A - x_1^A)}{\sqrt{1-\beta^2}} > 0 .$$

Таким образом, в любой системе, кроме K_A, события оказываются неодновременными, причем в одних системах второе событие будет происходить позже первого ($t_2^B > t_1^B$), а в других системах второе событие будет происходить раньше первого ($t_2^B < t_1^B$).

Нужно иметь в виду, что полученный нами результат относится лишь к событиям, причинно не связанным друг с другом (очевидно, что события, происходящие одновременно в разных точках пространства, не могут оказывать воздействия друг на друга). Иначе обстоит дело, если между событиями имеется причинная связь. В этом случае событие-причина во всех системах отсчета предшествует событию - следствию. Рождение элементарной частицы во всех системах отсчета происходит раньше ее распада. Ни в одной из систем «сын не рождается раньше отца».

Длина тел в разных системах отсчета. Сравним длину стержня в инерциальных системах отсчета K и K' (рис.). Предположим, что стержень, расположенный вдоль совпадающих осей x и x' покоится всистеме K'. Тогда определение его длины в этой системе не доставляет хлопот. Нужно приложить к стержню масштабную линейку и определить координату x'_1 одного конца стержня, а затем координату x'_2 другого конца. Разность координат даст длину стержня ℓ_0 в системе K': $\ell_0 = x'_2 - x'_1$.



Стержень покоится в системе K'. Относительно системы K он движется со скоростью v, равной относительной скорости систем V.

В системе K дело обстоит сложнее. Относительно этой системы стержень движется со скоростью v, равной скорости V, с которой система K' движется относительно системы K. (Обозначение V мы будем употреблять только применительно к относительной скорости систем отсчета.) Поскольку стержень движется, нужно произвести одновременный отсчет координат его концов x_1 и x_2 в некоторый момент времени t. Разность координат даст длину стержня ℓ в системе K:

$$\ell = x_2 - x_1.$$

Для сопоставления длин ℓ и ℓ_0 нужно взять ту из формул преобразований Лоренца, которая связывает координаты x, x' и время t системы K, т. е. первую из формул (113). Подстановка в нее значений координат и времени приводит к выражениям

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x_2' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Отсюда

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} .$$

(мы подставили вместо β его значение). Заменив разности координат длинами стержня, а относительную скорость V систем K и K' равной ей скоростью стержня v, с которой он движется в системе K, придем к формуле

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} .$$

Таким образом, длина движущегося стержня оказывается меньше той, которой обладает стержень в состоянии покоя. Аналогичный эффект наблюдается для тел любой формы: в направлении движения линейные размеры тела сокращаются тем больше, чем больше скорость движения. Это явление называется лоренцевым (или фицджеральдовым) сокращением. Поперечные размеры тела не изменяются. В результате, например, шар принимает форму эллипсоида, сплющенного в направлении движения. Можно показать, что зрительно этот эллипсоид будет восприниматься в виде шара. Это объясняется искажением зрительного восприятия движущихся предметов, вызванным неодинаковостью времен, которые затрачивает свет на прохождение пути от различно удаленных точек предмета до глаза. Искажение зрительного восприятия приводит к тому, что движущийся шар воспринимается глазом как эллипсоид, вытянутый в направлении движения. Оказывается, что изменение формы, обусловленное лоренцевым сокращением, в точности компенсируется искажением зрительного восприятия.

Промежуток времени между событиями. Пусть в системе K' в одной и той же точке с координатой x' происходят в моменты времени t'_1 и t'_2 два каких-то события. Это могут быть, например, рождение элементарной частицы и ее последующий распад. В системе K' эти события разделены промежутком времени

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

Найдем промежуток времени Δt между событиями в системе K, относительно которой система K' движется со скоростью V. Для этого определим в системе K моменты времени t_1 и t_2, соответствующие моментам t'_1 и t'_2 и образуем их разность:

$$\Delta t = t_2 — t_1.$$

Подстановка в нее значений координаты и моментов времени приводит к выражениям

$$t_1 = \frac{t'_1 + (V/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_2 = \frac{t'_2 + (V/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Отсюда
$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Если события происходят с одной и той же частицей, покоящейся в системе K', то $\Delta t' = t'_2 — t'_1$ представляет собой промежуток времени, измеренный по часам, неподвижным относительно частицы и движущимся вместе с ней относительно системы K со скоростью v, равной V (напомним, что буквой V мы обозначаем только относительную скорость систем; скорости частиц и часов мы будем обозначать буквой v). Время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, называется *собственным временем* этого тела и обычно обозначается буквой τ. Следовательно, $\Delta t' = \Delta\tau$. Величина $\Delta t == t_2 — t_1$ представляет собой промежуток времени между теми же событиями, измеренный по часам системы K, относительно которой частица (вместе со своими часами) движется со скоростью v. С учетом сказанного

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Из полученной формулы следует, что собственное время меньше времени, отсчитанного по часам, движущимся относительно тела (очевидно, что часы, неподвижные в системе K, движутся относительно частицы со скоростью —v). В какой бы системе отсчета не рассматривалось движение частицы, промежуток собственного времени измеряется по часам системы, в которой частица покоится. Отсюда следует, что промежуток собственного времени является инвариантом, т. е. величиной, имеющей одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета. С точки зрения наблюдателя, «живущего» в системе K, Δt есть промежуток времени между событиями, измеренный по неподвижным часам, а $\Delta\tau$— промежуток времени, измеренный по часам, движущимся со скоростью v. Поскольку $\Delta\tau < \Delta t$, можно сказать, что движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся часы. Подтверждением этого служит следующее явление. В составе космического излучения имеются рождающиеся на высоте 20—30 км нестабильные частицы, называемые мюонами. Они распадаются на электрон (или позитрон) и два нейтрино. Собственное время жизни мюонов (т. е. время жизни, измеренное в системе, в которой они неподвижны) составляет в среднем примерно 2 мкс. Казалось бы, что даже двигаясь со скоростью, очень мало отличающейся от c, они могут пройти лишь путь, равный $3\cdot10^8\cdot2\cdot10^{-6}$ м. Однако, как показывают измерения, они успевают в значительном количестве достигнуть земной поверхности. Это объясняется тем, что мюоны движутся со скоростью, близкой к c. Поэтому их время жизни, отсчитанное по часам, неподвижным относительно Земли, оказывается значительно большим, чем собственное время жизни этих частиц. Следовательно, не удивительно, что экспериментатор наблюдает пробег мюонов, значительно превышающий 600 м. Для наблюдателя, движущегося вместе с мюонами, расстояние до поверхности Земли сокращается до 600 м, поэтому мюоны успевают пролететь это расстояние за 2 мкс.

1.11.3. Интервал

В обычном пространстве расстояние $\Delta\ell$ между двумя точками с координатами x_i, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. определяется выражением

$$\Delta\ell = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\ ,$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$ и т. д. Это расстояние не зависит от выбора системы координат, т. е. является инвариантом. При переходе к другой координатной системе изменяются, вообще говоря, величины Δx, Δy и Δz, однако эти изменения таковы, что расстояние $\Delta \ell$ остается одним и тем же.

Казалось бы, что расстояние (или, как принято говорить, интервал) между двумя мировыми точками в четырехмерном пространстве-времени должно определяться аналогичным выражением

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \ ,$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ и т. д. Однако это выражение непригодно в качестве интервала, поскольку оно не является инвариантом — при переходе к другой инерциальной системе отсчета числовое значение этого выражения изменяется. Инвариантным, как мы покажем, является выражение

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2} \ ,$$

которое называют *интервалом* между событиями. Величина Δs является аналогом расстояния $\Delta \ell$ между точками в обычном пространстве.

Причина того, что интервал определяется не выражением

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \ ,$$

а выражением $\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$,

заключается в том, что, как говорят, метрика пространства-времени отличается от метрики обычного трехмерного пространства. В обычном пространстве справедлива евклидова геометрия, вследствие чего его называют *евклидовым*. Качественное различие между временем и пространством приводит к тому, что в выражение для интервала квадрат временной координаты и квадраты пространственных координат входят с разными знаками. Пространство, в котором расстояние между точками определяется выражением вида $\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$., называется псевдоевклидовым. Выражение можно написать в виде

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta \ell^2} \ ,$$

где $\Delta\ell$ — расстояние между точками обычного пространства, в которых произошли данные события.

Допустим, что рассматриваются события, происходящие с одной и той же частицей. Тогда отношение $\Delta\ell/\Delta t$ дает скорость частицы v. Поэтому, вынеся из-под корня $c\Delta t$, получим, что

$$\Delta s = c\Delta t\sqrt{1-(\Delta\ell/c\Delta t)^2} = c\Delta t\sqrt{1-v^2/c^2} \ .$$

Мы получили выражение $\Delta t\sqrt{1-v^2/c^2}$. Оно равно $\Delta\tau$ — промежутку собственного времени частицы между событиями. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\Delta s = c\cdot\Delta\tau.$$

Поскольку c — константа, а $\Delta\tau$ —инвариант, интервал Δs также оказывается инвариантом.

1.11.4. Преобразование и сложение скоростей.

Компоненты скорости частицы v в системе K определяются выражениями

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

В системе K' компоненты скорости v той же частицы равны

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, \quad v_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}.$$

Найдем формулы, связывающие нештрихованные компоненты скорости со штрихованными.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'}\cdot\frac{dt'}{dt}$$

Окончательно получим

$$v_x = \frac{v'_{x'} + V}{1 + Vv'_{x'}/c^2}, \qquad v_y = \frac{v'_{y'}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1 + Vv'_{x'}/c^2}, \qquad v_z = \frac{v'_{z'}\sqrt{1-V^2/c^2}}{1 + Vv'_{x'}/c^2}.$$

Аналогично

$$v'_{x'} = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2}, \qquad v'_{y'} = \frac{v_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2}, \qquad v'_{z'} = \frac{v_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv'_{x'}/c^2}.$$

1.11.5. Релятивистский импульс.

Выражение, обеспечивающее инвариантность закона сохранения импульса, может быть получено, если вместо времени t подставить собственное время τ.

Тогда $\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

1.11.6. Релятивистское выражение для энергии.

В релятивистской механике справедливым остается выражение

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Это означает, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = F$. Откуда видно, что сила не является инвариантной величиной. Кроме того, сила *F* и ускорение *a* не коллениарны.

Легко получить выражение для кинетической энергии. Поскольку $dE_k = dA$ и $dE_k = v\cdot p\cdot dt$, $dA = F\cdot ds$

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2.$$

Отсюда следует, что $E_0 = mc^2$ *является энергией покоя*. Энергия и импульс в релятивистской механике не сохраняются. Инвариантом является выражение:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 = \text{inv}.$$

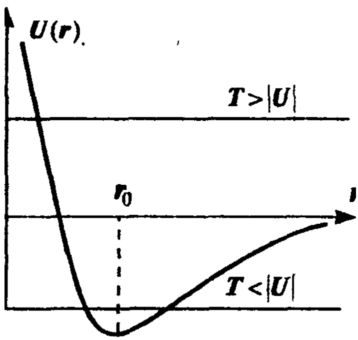
Глава 2. Молекулярная физика и термодинамика.

Введение.

В отличие от механики, которая изучает движение отдельных частиц или тел под действием различных сил, молекулярная физика имеет дело со свойствами вещества. Как показывает опыт, всякое вещество состоит из большого числа отдельных микроскопических частиц — атомов и молекул, которые взаимодействуют между собой и находятся в непрестанном движении. Такая система частиц называется макроскопической.

Можно выделить три наиболее характерных состояния, в которых может находиться вещество, — твердое, жидкое и газообразное. Свойство тела находиться в одном из этих состояний есть его макроскопическое свойство, не зависящее от свойств отдельных частиц, образующих тело. Например, железо может существовать в кристаллическом состоянии (в виде твердого тела) или пребывать в расплавленном состоянии (в виде жидкости), или испаряться в виде газа, хотя при переходе из одного состояния в другое с самими атомами железа не происходит никаких изменений. Макроскопическими являются также свойства вещества по отношению к внешним воздействиям, например, сжимаемость. Другими словами, макроскопические свойства — это свойства тела, рассматриваемые без учета его внутренней структуры. Задача молекулярной физики — объяснение и изучение макроскопических свойств вещества исходя из известных микроскопических взаимодействий между отдельными составляющими его частицами. Простейшее взаимодействие между частицами — обычное механическое столкновение, но взаимодействия могут быть и более сложными.

С этой точки зрения рассмотрим существование твердого, жидкого и газообразного состояний. Из механики известно, что положение частицы в пространстве характеризуется ее потенциальной энергией $U(r)$, минимум которой отвечает положению устойчивого равновесия. Величина ее кинетической энергии T служит мерой движения частицы. Таким образом, в зависимости от соотношения между величинами потенциальной и кинетической энергий частица будет или «привязана» к определенной области пространства, или совершать свободное движение.



На рис. изображена характерная кривая потенциальной энергии частицы во внешнем поле центра притяжения, имеющая глубокий минимум в точке r_0. Эта кривая отвечает взаимодействию частицы с полем, которое приводит к притяжению частицы на больших расстояниях ($r > r_0$) и к отталкиванию на малых ($r < r_0$). Двумя прямыми изображены возможные значения полной энергии частицы E = T + U . В первом случае |U| >> T, и частица не может покинуть «потенциальную яму» — эта ситуация отвечает случаю твердого тела. Во втором случае, когда T >> |U|, частица свободно покидает яму — имеет место случай газа частиц. Промежуточный случай отвечает жидкости.

В макроскопической системе все частицы одинаковы, ни одна из них не является выделенной, и все сказанное может относиться к любой из них. С другой стороны, и потенциальная, и кинетическая энергии частиц в большой системе имеют не произвольные значения, а зависят, благодаря взаимодействию между частицами, от энергии всей системы в целом, которая, в свою очередь, определяется внешними условиями. В результате наибольшая часть частиц в макроскопической системе имеет близкие значения как потенциальной, так и кинетической энергии, поэтому вся система частиц и оказывается в одном из макроскопических состояний.

Таким образом, система большого числа частиц, образующая макроскопическое тело; благодаря взаимодействию между частицами, обнаруживает качественно новые свойства по сравнению с механической системой конечного числа частиц. Поскольку в формировании этих свойств участвуют одновременно все частицы большой системы, для их описания уже недостаточно знания характеристик какой-либо отдельной частицы. Макроскопические свойства тела определяются суммарными и усредненными по большому числу частиц величинами. Такой способ описания является статистическим, а вычисляемые макроскопические характеристики системы называются термодинамическими переменными. Задание термодинамических переменных полностью определяет состояние системы. Пользуясь термодинамическими переменными, можно изучать процессы передачи и преобразования энергии в физических объектах, не обращаясь к микроскопической картине. Статистический и термодинамический методы — основа для изучения явлений и процессов, происходящих в системах, состоящих из большого числа частиц.

Из всего сказанного следует: несмотря на то что каждая отдельная частица подчиняется законам механики, поведение системы большого числа частиц уже не может быть описано законами механики, а подчиняется законам статистической физики и термодинамики. Возникает вопрос: насколько большим должно быть число частиц в системе, чтобы ее описание с помощью законов механики становилось уже недостаточным и система частиц проявляла бы макроскопические свойства. Для ответа на этот вопрос следует вспомнить, что говорить о существовании каких-либо физических свойств вещества можно лишь тогда, когда существует какой-либо способ их измерения. Иными словами, необходимо указать прибор, с помощью которого можно было бы произвести измерения соответствующих свойств. Процесс измерения представляет собой взаимодействие прибора с макроскопическим телом, и поэтому в процессе измерения все параметры системы изменяются на величину порядка энергии этого взаимодействия. Очевидно, что о макроскопических свойствах системы частиц можно говорить лишь в том случае, если взаимодействие мало изменяет состояние всей системы, так что средние значения всех физических величин в системе при измерении остаются практически неизменными. Если это требование выполняется, систему частиц можно считать большой. При этом точное значение числа частиц в системе не имеет никакого значения точно так же, как и характеристики отдельной частицы. Важно только, что это число частиц велико в указанном выше смысле. В реальных макроскопических телах числа частиц огромны — они составляют величину порядка 10^{20} частиц на 1 см^3.

2.1. Основные представления кинетической теории

2.1.1. Теплота как форма энергии. Температура.

Беспорядочное движение микроскопических частиц связано с содержанием в веществе **теплоты** — особой формы энергии. Эта связь достаточно очевидна на примере зависимости броуновского движения от количества сообщенного телу тепла.

Макроскопическая характеристика теплового движения — **температура**. Температура есть мера содержащегося в теле тепла. Она же определяет направление перехода тепла — от более нагретого тела к менее нагретому. Если температуры тел одинаковы, то передачи тепла от одного тела к другому не происходит.

Рассматривая теплоту как форму энергии, необходимо связать ее с кинетической энергией частиц. Чем больше нагрето тело, тем больше и кинетическая энергия его частиц. Таким образом, кинетическую энергию движения частиц так же, как и температуру, можно рассматривать как меру теплового движения. Естественно предположить, что обе эти величины связаны между собой. На существование такой связи указывает, например, аналогия между переходом теплоты от одного тела к другому и передачей кинетической энергии при столкновении упругих тел.

Следует помнить, что температура — это макроскопическая характеристика тела, т. е. термодинамическая переменная, в то время как кинетическая энергия характеризует отдельную частицу. Поэтому температура должна быть связана со средней кинетической энергией, приходящейся на одну частицу в системе большого числа частиц. Среднюю кинетическую энергию частиц в системе, состоящей из N частиц, обозначим через $\langle E_k \rangle$ и определим ее следующим образом:

$$\left\langle \overline{E}_k \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} . \tag{2.1}$$

Если все частицы одинаковы, массу частицы можно вынести из-под знака суммы:

$$\left\langle \overline{E}_k \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{m}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i^2 = \frac{1}{2} m \left\langle v^2 \right\rangle . \tag{2.2}$$

Будем считать что температура $T \sim 2\langle E_k \rangle/3 = m\langle v^2 \rangle/3$.

Для того чтобы выразить температуру в градусах, нужно ввести коэффициент пропорциональности, показывающий, сколько джоулей соответствует одному градусу. Он называется постоянной Больцмана и, как показывают измерения, равен $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, где К означает градус Кельвина — единицу измерения температуры, используемую в физической шкале. Тогда соотношение между температурой в градусах и энергией в джоулях запишется в виде:

$$k_Б T = \frac{1}{3} m \left\langle v^2 \right\rangle \quad \text{или} \quad \left\langle E_k \right\rangle = \frac{3}{2} k_Б T . \tag{2.3}$$

Принятая в физике шкала температур называется абсолютной шкалой, или шкалой Кельвина. В этой шкале температура замерзания воды, то есть 0°С, соответствует 273,15 градусов Кельвина, что обозначается 273,15 К. Согласно выражению (2.3) при $T = 0$ всякое тепловое движение частиц в веществе прекращается. Эта температура имеет название абсолютного нуля.

Подчеркнем статистический характер определения температуры, поскольку она связана со средней энергией частиц. Поэтому можно говорить лишь о температуре системы достаточно большого числа частиц — макроскопической системы, и нельзя говорить о температуре одной или, допустим, десяти частиц. В процессе измерения температуры происходит обмен теплом между системой частиц — объектом измерения и измерительным прибором — термометром. Понятие температуры тела приобретает смысл в том случае, если обмен теплом между телом и прибором в процессе измерения температуры мало изменяет состояние тела.

Для характеристики средней скорости движения частиц в системе обычно используется величина, называемая среднеквадратичной, или тепловой скоростью частиц. Средние тепловые скорости частиц существенно зависят от массы частицы

$$v_T = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_Б T}{m}}\,. \qquad (2.4)$$

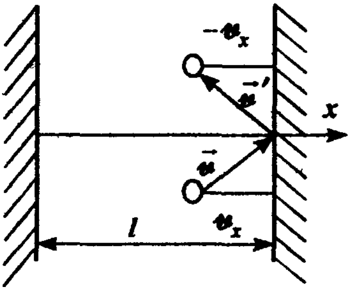
Для молекулы водорода H_2 $m_{H2} = 2 \cdot m_H$, а для молекулы кислорода $m_{O2} = 32 \cdot m_H$, и отношение тепловых скоростей есть

$$\frac{v_{TH_2}}{v_{TO_2}} = \sqrt{\frac{m_{O_2}}{m_{H_2}}} = 4$$

Следовательно, молекулы кислорода движутся в 4 раза медленней. Порядок величины тепловой скорости атомов при T = 300 К, что соответствует комнатной температуре, составляет 10^3 м/с. Тепловые скорости броуновских частиц составляют по сравнению с ней ничтожные величины.

2.1.2.Давление идеального газа

Самой простой моделью макроскопического вещества является газ частиц. Газ представляет собой достаточно разреженную систему частиц. Частицы в газе находятся на значительном удалении друг от друга, совершая свободное движение и время от времени сталкиваясь друг с другом. Поэтому в первом приближении при рассмотрении газа можно не учитывать размеры и форму молекул, т. е. считать частицы материальными точками. По этой же причине можно пренебречь взаимодействием частиц на расстоянии, и к столкновениям частиц между собой и со стенками сосуда применять законы соударений упругих шаров. Такой газ называется идеальным. Модель идеального газа позволяет описать существенные черты поведения реального вещества.



Пусть в прямоугольном сосуде находится N молекул идеального газ». Стенки сосуда будем считать «идеально, отражающими». Примем,что при отражении от стенки скорость молекулы не меняется по величине, но меняется лишь по направлению. Если молекула, компонента скорости которой в направлении оси x равна v_x, ударяется о стенку, то после отражения компонента ее скорости в этом направлении будет $-v_x$.

Для изменения импульса в этом же направлении имеем $\Delta p_x = 2 \cdot m \cdot v_x$.

Долетев до противоположной стенки, молекула отразится от нее и снова ударится о первую стенку. Время между ударами составит $\Delta t = 2 \cdot \ell / v_x$, а число ударов за 1 с будет $n_x = \frac{1}{\Delta t} = \frac{v_x}{2\ell}$. За 1 с молекула сообщит стенке импульс с компонентой вдоль оси x

$$n_x \cdot \Delta p = 2m \cdot v_x \frac{v_x}{2\ell} = \frac{mv_x^2}{\ell}.$$

Но импульс, передаваемый за единицу времени стенке, равен силе, с которой данная молекула действует на стенку. Таким образом, i-я молекула действует на стенку с силой, компонента которой в направлении оси x $F_{ix} = mv^2_{ix}/\ell$.

Компонента силы, действующей вдоль оси х со стороны всех частиц, находящихся в сосуде, составит $F_x = \sum_{i=1}^{N} F_{ix} = \sum_{i=1}^{N} \frac{mv_{ix}^2}{\ell}$.

Перепишем это соотношение в виде $F_x = \frac{mN}{\ell} \sum_{i=1}^{N} \frac{v_{ix}^2}{N}$.

Величина $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_{ix}^2$ есть средний квадрат компоненты скорости молекулы в направлении оси x. Поэтому $F_x = \dfrac{mN\left\langle v_x^2 \right\rangle}{\ell}$. Если эту силу разделить на площадь стенки S, то получим величину давления на стенку:

$$P = \frac{F_x}{S} = \frac{m \cdot N \cdot \left\langle v_x^2 \right\rangle}{\ell S}. \tag{2.5}$$

Но $\ell \cdot S$ есть объем сосуда V. Значит: $P = \dfrac{F_x}{S} = \dfrac{m \cdot N \cdot \left\langle v_x^2 \right\rangle}{V}$.

Таким образом, давление газа на стенку оказалось связанным со средним квадратом скорости смещения частиц в направлении нормали к стенке.

Воспользуемся теперь соотношением $v^2_i = v^2_{ix} + v^2_{iy} + v^2_{iz}$.

Усредняя его по всем частицам, получим $\langle v^2\rangle = \langle v^2_x\rangle + \langle v^2_y\rangle + \langle v^2_z\rangle$.

Но все направления в пространстве равноправны, поэтому $\langle v^2_x\rangle = \langle v^2_y\rangle = \langle v^2_z\rangle$ и, следовательно, $\langle v^2_x\rangle = \langle v^2\rangle/3$. Выражение для давления принимает вид

$$PV = \frac{1}{3} mN \left\langle v^2 \right\rangle.$$

Учтем, что величина $m\langle v^2\rangle/2$ равна средней кинетической энергии поступательного движения молекул $\langle E_k\rangle$. Окончательно получим:

$$PV = \frac{2}{3} N \left\langle E_k \right\rangle. \tag{2.6}$$

Это соотношение одно из основных в кинетической теории газов.

2.1.3. Уравнение состояния идеального газа

В процессе вывода соотношения (2.6) возникли еще две макроскопические характеристики системы многих частиц — давление P и объем V. Задание температуры, давления и объема определяет состояние системы частиц (тела). Эти величины называются параметрами состояния.

Давление P, объем V и температура, T не являются независимыми величинами. Соотношение, связывающее эти три параметра, вида $f(P, V, T) = 0$ называется уравнением состояния. Найдем уравнение состояния идеального газа. Подставляя в соотношение (2.6) выражение (2.3), получим

$$PV = N \cdot k_Б \cdot T. \qquad (2.7)$$

Отметим универсальный характер полученного уравнения: в него не входят никакие величины, характерные для определенного газа, а только числа частиц. Отсюда следует, в частности, что при одинаковых давлении и температуре разные газы, занимающие равные объемы, содержат в них равные числа молекул. Этот закон был установлен ранее опытным путем Авогадро.

Перепишем уравнение состояния в терминах объема, приходящегося на единицу вещества — моль. Один моль — это количество вещества в граммах, численно равное его молекулярному весу. Например, 1 моль кислорода содержит 32 г вещества. Удобство этой единицы измерения состоит в том, что по определению в 1 моле любого вещества содержится одинаковое число молекул, называемое числом Авогадро N_A . Оно равно $6 \cdot 10^{23}$ молекул. Число молекул в объеме газа можно записать в виде:

$$N = \nu \cdot N_A,$$

где ν — число молей данного вещества в указанном объеме. В этих обозначениях уравнение состояния принимает вид:

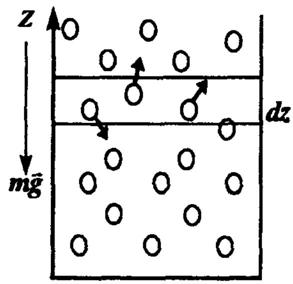
$$PV=\nu \cdot R \cdot T. \qquad (2.8)$$

Величина $R = k_Б N_A$ называется **газовой постоянной**.

Пусть при нагревании газа на 1 К объем, занимаемый 1 молем газа, изменился при неизменном давлении на ΔV . Представляя давление газа в виде $P = F/S$, а объем сосуда в виде $\Delta V =$, видим, что величина $P\Delta V = F\Delta h$ есть работа, произведенная газом при его расширении. Таким образом, физический смысл газовой постоянной состоит в том, что она численно равна работе, совершенной 1 молем газа при его нагревании на 1 К при постоянном давлении.

2.1.4. Идеальный газ в поле силы тяжести

Каково поведение идеального газа в поле внешней силы? Для определенности в качестве внешней силы возьмем хорошо известную силу тяжести mg. Под действием внешней силы механическая система частиц приобретает импульс и перемещается как целое поступательно в направлении силы. В идеальном газе, находящемся во внешнем поле сил, каждая отдельная частица приобретает импульс в направлении силы, а также соответствующую потенциальную энергию. Однако в газе наряду с упорядоченным движением в направлении действия силы существует хаотическое тепловое движение. В результате конкуренции между этими двумя типами движений возникает неравномерное распределение макроскопических параметров: плотности частиц, давления, температуры по объему, занимаемому газом.



Рассмотрим столб газа сечением S, находящийся при постоянной температуре в поле силы тяжести. Выделим слой газа толщиной dz на высоте z и вычислим давление газа на его основания. Давление слоя газа на верхнее и нижнее основания слоя разное — оно различается в результате действия силы тяжести. Очевидно, разность давлений равна весу газа, заключенного в слое, отнесенному к единице площади основания столба.

Пусть разность давлений есть dP. Давление газа с ростом высоты уменьшается, поэтому dP равно весу слоя со знаком минус. Вес газа в объеме слоя $dV = dz \cdot S$ равен $\rho \cdot g \cdot dV$, где ρ — плотность газа, g — ускорение силы тяжести. Таким образом,

$$dP = -\rho \cdot g \cdot dV/S = -\rho \cdot g \cdot dz.$$

По определению $\rho = \dfrac{mN}{V}$. Выразим отношение N/V с помощью уравнения состояния (2.7), после чего находим:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{mg}{k_Б T} dz .$$

Интегрируя это соотношение, получим $\ln P = -\frac{mg}{k_Б T} z + \ln P_0$, где P_0 — константа, определяемая пределами интегрирования. Окончательно имеем:

$$P(z) = P_0 \exp(-mgz / k_Б T). \qquad (2.9)$$

Здесь P_0 — давление при z = 0. т. е. у основания столба. Аналогично с высотой изменяется и плотность частиц

$$n = n_0 \exp(-mgz / k_Б T). \qquad (2.10)$$

Давление и плотность газа распределены по объему газа неоднородно, они принимают максимальные значения у основания столба и убывают с высотой.

Величина, входящая в показатель экспоненты в формулах (2.9) и (2.10), есть потенциальная энергия частицы в поле тяжести U = mgz-Таким образом, распределение молекул в произвольном потенциальном внешнем поле, в котором частицы обладают потенциальной энергией $U(r)$, может быть описано формулой:

$$n = n_0 \exp(-U(\vec{r}) / k_Б T). \qquad (2.11).$$

Эта формула называется распределением Больцмана. Здесь n_0 — плотность частиц в точках пространства, для которых потенциальная энергия принята равной нулю.

Согласно распределению Больцмана число частиц, обладающих определенными значениями потенциальной энергии определяется отношением величины потенциальной энергии U к тепловой энергии частицы $k_Б T$. Чем больше энергия теплового движения, тем более разупорядочена система частиц, значит, тем более однородно распределены частицы в пространстве. В самом деле, если $k_Б T >> U$, $\exp\left(-\frac{U}{k_Б T}\right) \cong 1$, и из формулы (2.11) следует, что $n = n_0$ при любом значении U. В случае $k_Б T << U$ распределение частиц максимально упорядочено: плотность частиц максимальная состоянии с минимальной потенциальной энергией U_{min}, в то время как плотность частиц в других состояниях равна нулю.

2.1.5. Распределение Больцмана и вероятность.

Распределение Больцмана представляет собой отношение числа частиц, обладающих определенной потенциальной энергией, или, что то же самое, находящихся в некоторой точке силового поля, к полному числу частиц в газе. Тот факт, что та или иная частица оказывается в определенной точке пространства, есть событие случайное, потому что оно является следствием хаотического теплового движения. Поэтому можно утверждать, что распределение Больцмана представляет собой вероятность того, что некоторое число частиц будет иметь заданное значение потенциальной энергии. Рассмотрим основные свойства вероятности. Теория вероятности изучает явления, которые имеют случайный характер. Случайным называется событие, которое нельзя предсказать с определенностью. Этим оно отличается от достоверного события. Пример случайного события — приход определенной молекулы в заданную точку в результате беспорядочного теплового движения в газе частиц. Пример достоверного события — приход той же молекулы в заданную точку в результате движения по траектории с заданной скоростью без столкновений. В первом случае появления меченой молекулы в заданной точке можно ожидать с некоторой вероятностью.

Вероятностью $P(A)$ некоторого события A называется частота появления данного события A в общем числе событий A. Ясно, что вероятность есть положительная величина. Из ее определения следует, что $0 <= P <= 1$. Если событие достоверно, то $P = 1$. Если событие не может произойти вообще, то $P = 0$.

Вероятность сложного события, состоящего из двух независимых событий, равна произведению вероятностей каждого из независимых событий.

Случайное событие, в частности, может состоять в том, что какая-либо физическая величина имеет определенное, но произвольное значение. Такие величины называются случайными. Случайные величины могут принимать как дискретные, так и непрерывные значения.

Если случайная физическая величина принимает непрерывный ряд значений x, то вероятность dP того, что величина x находится в бесконечно малом промежутке между x и $x + dx$, равна $W(x)dx = \frac{dP}{dx}dx$. Функция $W(x)$ называется плотностью вероятности.

Очевидно, $\int W(x)dx = 1$.

Предположим, что случайная величина принимает ряд значений $x_1, x_2,..., x_N$, с вероятностями $P_1, P_2,..., P_N$. Тогда ее среднее значение определяется соотношением

$$< x > = \sum_{1}^{N} P_i x_i \; . \qquad (2.12)$$

Если x меняется непрерывно и плотность вероятности есть $W(x)$, то среднее значение

$$< x > = \int x W(x) dx \; . \qquad (2.13)$$

Аналогично можно определить средние значения и других величин: среднего квадратичного значения случайной величины

$$< x^2 > = \int x^2 W(x) dx ; \qquad (2.14)$$

среднего значения произвольной функции случайной величины

$$< f(x) > = \int f(x) W(x) dx \qquad (2.15)$$

и т. д.

Зная, что плотность вещества по определению $n = \frac{dN}{dV}$, формулу

$n = n_0 \exp(-U(\vec{r})/k_Б T)$ можно записать в виде:

$$dN_V = n_0 \exp(-U(\vec{r})/k_Б T) dV \; . \qquad (2.16).$$

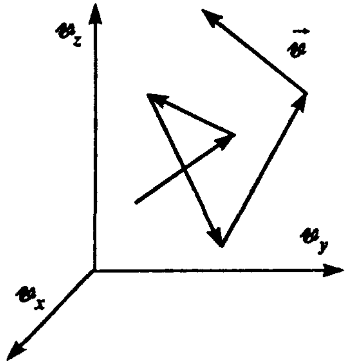
Здесь dN_V — число частиц, заключенных в элементе объема dV и имеющих заданное значение потенциальной энергии $U(r)$. Полное число частиц в газе можно найти, суммируя по всему объему, занятому газом:

$$N = n_0 \int \exp(-U(\vec{r})/k_Б T) dV \; . \qquad (2.17)$$

Таким образом, в газе, находящемся во внешнем поле, характеризуемом потенциальной энергией $U(r)$, устанавливается неравномерное распределение частиц в пространстве. Число частиц максимально в состоянии с минимальной потенциальной энергией и убывает вдали от этой точки. Эта неравномерность обусловлена случайным блужданием частиц в координатном пространстве, которое является следствием теплового движения в газе при конечной температуре.

2.1.6. Распределение молекул по скоростям

Аналогичная неравномерность имеет место и в распределении частиц в газе по скоростям. Случайный обмен импульсами и энергиями частиц при столкновениях приводит к некоторому разбросу кинетических энергий и скоростей молекул вокруг их средних значений, соответствующих установившейся в газе температуре.



Случайные изменения скоростей молекул в результате столкновений можно рассматривать как случайное блуждание частиц, но не в реальном координатном пространстве, а в пространстве скоростей, осями в котором являются скорости частиц v_x, v_y, v_z (рис.).

Поэтому все сказанное о хаотическом тепловом движении в реальном пространстве применимо и к распределению частиц по скоростям. В частности, можно записать формулу для числа частиц, имеющих значение компоненты скорости v_z в интервале между значениями v_z и $v_z + d_z$ в виде, аналогичном (2.16):

$$dN_V = Ae^{-mv_z^2/2k_Б T} \cdot dv_z,$$

где теперь вместо потенциальной энергии частицы находится та часть ее кинетической энергии, которая связана с движением вдоль оси Z, а величина A — некоторая размерная константа.

Поскольку движения в направлениях x, y и z равноправны, распределения частиц со скоростями в этих направлениях описываются такими же выражениями. Тот факт, что частица обладает каким-либо значением скорости v, представляет собой случайное событие, состоящее из трех независимых случайных событий — определенных значений компонент скоростей v_x, v_y, v_z. Поэтому число частиц, обладающих заданным значением полной скорости v, определяется произведением вероятностей указанных случайных событий

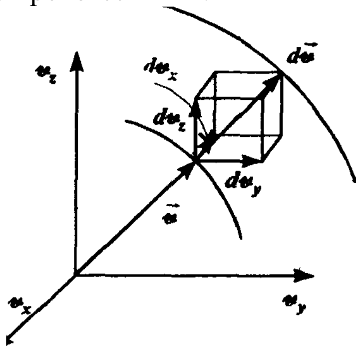
$$dN_v = A^3 e^{-m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/2kT} \cdot dv_x dv_y dvz. \quad (2.18)$$

Окончательно распределение частиц в газе по скоростям имеет вид:

$$dN_v = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z. \quad (2.19)$$

Это выражение называется распределением Максвелла. Можно получить выражение для числа частиц в газе, обладающих заданной величиной скорости. Для этого формулу (2.19) нужно просуммировать по всем частицам, различающимся компонентами скорости v_x, v_y, v_z, но обладающими одинаковой абсолютной величиной v. Это суммирование можно произвести так.

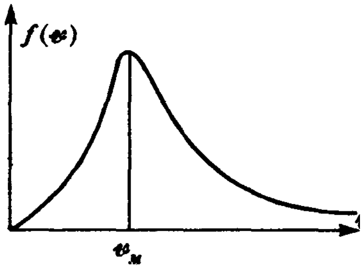
Рассмотрим произведение $dv_x dv_y dv_z$, входящее в формулу (2.19). Оно представляет собой бесконечно малый элемент объема в пространстве скоростей (рис.)



Состояния с различными проекциями скоростей v_x, v_y, v_z, но с одинаковой величиной v будут заполнять шаровой слой, объем которого равен $4\pi v^2 dv$. Заменив, таким образом, в формуле (2.19) элемент объема на элемент шарового слоя, найдем распределение Максвелла по абсолютным величинам скоростей:

$$dN_v = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv . \qquad (2.20)$$

Функция $f(v) = \dfrac{dN_v}{dv}$, определяемая выражением (2.20), представляет собой плотность вероятности того, что частицы имеют заданное значение абсолютной величины скорости. Приравнивая нулю производную от нее по v, можно найти положение максимума этой функции. Графически функция представлена на рис.



Видно, что наиболее вероятная величина скорости в газе — скорость v_m.

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} .$$

Она немного отличается от введенной ранее средней тепловой скорости (2.4). Видно также, что вероятность частиц иметь скорость, равную нулю, или, наоборот, иметь бесконечную скорость равна нулю. Следовательно, наибольшее число частиц имеет близкие значения скоростей вблизи скорости v_m. Функция распределения Максвелла позволяет вычислить все представляющие физический интерес средние характеристики газа, например, величину средней скорости

$$< v > = \int v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{m}} , \qquad (2.21)$$

и величину среднеквадратичной скорости:

$$\sqrt{<v^2>} \equiv v_T = (\int v^2 f(v)dv)^{1/2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}\,.$$

которая была введена ранее. Все эти средние скорости близки друг другу.

2.1.7. Распределение Максвелла-Больцмана

Выражение (2.18) описывает распределение частиц в координатном пространстве в потенциальном поле, выражение (2.19) — распределение частиц газа по скоростям. Эти распределения являются независимыми. Применяя теорему об умножении вероятностей независимых событий, можно получить вероятность того, что частица имеет одновременно заданные значения координат и скоростей :

$$dP = Ce^{-\left(\frac{mv^2}{2}+U(r)\right)/kT} dv_x dv_y dv_z dx dy dz. \qquad (2.23)$$

Здесь $mv^2/2 + U = E$ — полная механическая энергия частицы. Распределение (2.23) называется распределением Больцмана-Максвелла.

2.2. Теория теплоты. Термодинамика идеального газа

2.2.1. Внутренняя энергия идеального газа

Внутренней энергией тела называют часть его полной энергии за вычетом кинетической энергии движения тела как целого и потенциальной энергии тела во внешнем поле. Таким образом, во внутреннюю энергию входят кинетическая энергия поступательного и вращательного движений молекул, потенциальная энергия их взаимодействия, энергия колебательного движения атомов в молекулах, а также энергия различных видов движения частиц в атомах.

В идеальном газе потенциальная энергия взаимодействия молекул пренебрежимо мала и внутренняя энергия равна сумме энергий отдельных молекул

$$E_{вн} = \sum_i E_i \,, \tag{2.24}$$

где E_i — энергия отдельной молекулы. До сих пор мы пользовались представлением о молекулах как о материальных точках. Кинетическая энергия молекул считалась совпадающей с энергией их поступательного движения, а средняя кинетическая энергия молекулы полагалась равной $\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} k_Б T$. Эта энергия распределяется между тремя поступательными степенями свободы.

Ввиду полной беспорядочности движения молекул в газе все направления перемещения молекулы равновероятны. Поэтому на каждую степень свободы поступательного движения приходится в среднем энергия

$$\langle E_i \rangle = \frac{1}{3} \langle E_k \rangle = \frac{1}{3} kT \,.$$

Представление о молекулах как о материальных точках оправдывается только для одноатомных газов. В случае многоатомных газов нужно рассматривать молекулы как сложные системы, способные вращаться как целое, причем атомы в них могут совершать колебания вблизи своих положений равновесия. Общее число степеней свободы молекулы при этом увеличивается.

Вспомним, что числом степеней свободы механической системы называется количество независимых параметров, с помощью которых может быть задано положение системы. Так, положение материальной точки в пространстве определяется заданием значений трех ее координат. В соответствии с этим материальная точка имеет три степени свободы.

Положение абсолютно твердого тела можно определить, задав три координаты его центра инерции и три угла, характеризующие возможные повороты тела в пространстве. Таким образом, абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы — три поступательных и три вращательных.

N материальных точек, не связанных между собой, имеют 3N степеней свободы. Поскольку положение в пространстве системы как целого точно так же, как и положение абсолютно твердого тела определяется шестью параметрами, упомянутыми выше, то число степеней свободы такой системы равно $3 \cdot N$-6. Это число соответствует возможным смещениям точек относительно друг друга около своих положений равновесия. Такой тип движения называется колебательным. Значит, количество колебательных степеней свободы и есть $3 \cdot N$-6.

Энергия молекул, состоящих из некоторого числа атомов, не жестко связанных друг с другом, будет теперь складываться из энергии поступательного движения, вращательной энергии и энергии колебаний

$$E_i = E_{поступ} + E_{вращ} + E_{колеб}. \qquad (2.26)$$

Нет причин полагать, что поступательное движение является в какой-то мере выделенным по сравнению с вращательным или колебательным. Поэтому следует считать, что по-прежнему на каждую степень свободы молекулы приходится энергия, равная $kT/2$. Однако следует учесть особенность, связанную с колебательным движением. Средняя энергия колебательного движения складывается из средней кинетической энергии и равной ей средней потенциальной энергии. Поэтому на каждую колебательную степень свободы приходится энергия, в два раза большая, чем на поступательные или вращательные степени свободы. Следовательно, средняя энергия молекулы должна равняться:

$$\langle E_i \rangle = i \cdot k \cdot T, \qquad (2.27)$$

где i — сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

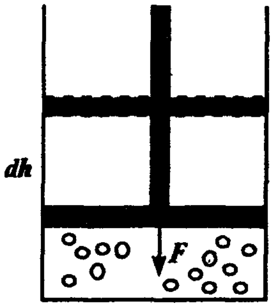
$$i = i_{поступ} + i_{вращат} + 2 \cdot i_{колеб}. \qquad (2.28)$$

Внутренняя энергия на один моль идеального газа

$$E_M = \frac{i}{2} N_A kT = \frac{i}{2} RT\ . \qquad (2.29)$$

2.2.2. Изменение внутренней энергии. Первое начало термодинамики

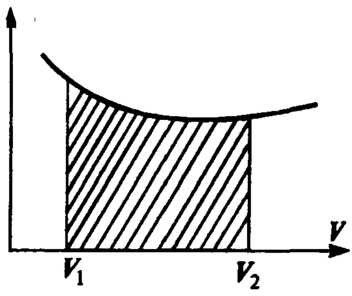
Внутренняя энергия системы может изменяться за счет энергии, сообщаемой системе извне. Эта энергия может сообщаться системе посредством двух процессов: либо за счет работы, производимой внешними силами над системой, либо за счет передачи ей тепла. Рассмотрим газ, сжимаемый в сосуде поршнем под действием силы F (рис.). Пусть под действием этой силы поршень переместился на расстояние dh, сжав газ. Работа силы на пути dh - $dA = Fdh$.



Разделив величину силы на площадь поршня, получим давление P, а умножив на S, получим изменение объема газа dV . Таким образом, производимая над газом работа

$$dA = PdV. \qquad (2.30)$$

Такую же по величине работу совершает газ при расширении, перемещая поршень. При этом dV положительно, если газ расширяется, и отрицательно при сжатии газа. Соответственно работа dA положительна или отрицательна: в первом случае система производит работу сама, во втором — внешние силы производят работу над системой.



Графически процесс изменения состояния газа при его расширении или сжатии изображается на кривой P, V участком 1-2 на рис. Полная работа, совершаемая газом, при расширении от V_1 до V_2:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV\ . \qquad (2.31)$$

Эта работа численно равна заштрихованной площади, заключенной под кривой $P(V)$.

Рассмотрим способы передачи телу тепла. При соприкосновении тел либо при взаимодействии тел через излучение, изменение внутренней энергии происходит за счет передачи энергии хаотически движущихся частиц одного тела частицам другого.

Энергия, передаваемая от одного тела другому, представляет собой теплоту. Обозначим ее через Q. Теплота измеряется в тех же единицах, что и энергия.

Связь между переданным теплом, изменением внутренней энергии системы и произведенной работой выражается уравнением

$$dQ = dE + dA = dE + PdV. \tag{2.32}$$

Это уравнение представляет собой закон сохранения энергии применительно к механической и тепловой энергии макроскопических тел. Он получил название **первого начала термодинамики**.

Важно учесть, что в выражении (2.32) работа и количество тепла не есть полные дифференциалы каких-либо величин, в то время как внутренняя энергия является таковой. Можно говорить о внутренней энергии в данном состоянии, а не о количестве тепла или работы, которыми обладает тело. Нельзя делить энергию тела на тепловую и механическую, речь идет лишь об изменении внутренней энергии тела за счет количества тепла, переданного ему или отданного им, и количества совершенной работы. Это разделение неоднозначно и зависит от начального и конечного состояний тела и от характера совершаемого процесса. Поэтому, например, в процессе перехода из состояния 1 в состояние 2 изменение внутренней энергии может быть равно нулю, а тело при этом может приобрести или потерять энергию.

2.2.3. Теплоемкость идеального газа

Количество тепла, при получении которого температура тела повышается на один градус, называется теплоемкостью. Согласно этому определению

$$C = \frac{dQ}{dT}. \tag{2.33}$$

Теплоемкость различается в зависимости от того, при каких условиях происходит нагревание тела — при постоянном объеме или при постоянном давлении.

Если нагревание тела происходит при постоянном объеме, т. е. $dV = 0$, то работа равна нулю. В этом случае передаваемое телу тепло идет только на изменение его внутренней энергии, $dQ = dE$, и в этом случае теплоемкость равна изменению внутренней энергии при изменении температуры на 1 К, т. е.

$$C_V = \frac{dE}{dT}. \qquad (2.34)$$

Поскольку для газа $E = \frac{iRT}{2}$, то $C_V = \frac{i}{2}R$. (2.35)

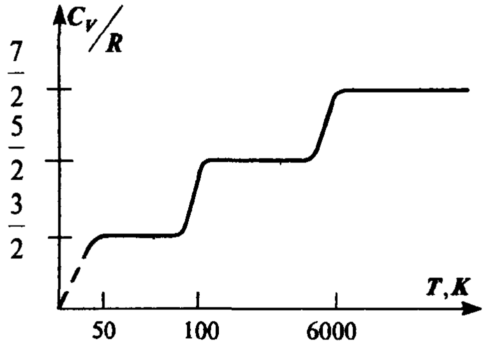
Эта формула определяет теплоемкость 1 моля идеального газа, называемую молярной. При нагревании газа при постоянном давлении его объем меняется, сообщенное телу тепло идет не только на увеличение его внутренней энергии, но и на совершение работы, т.е. $dQ = dE + PdV$. Теплоемкость при постоянном давлении $C_P = \frac{dE}{dT} + P\frac{dV}{dT}$.

Для идеального газа $PV = RT$ и поэтому $PdV = RdT$.

Учитывая это, найдем

$$C_P = i\frac{R}{2} + R = C_V + R. \qquad (2.36)$$

Отношение $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ представляет собой величину, характерную для каждого газа и определяемую числом степеней свободы молекул газа. Измерение теплоемкости тела есть, таким образом, способ непосредственного измерения микроскопических характеристик составляющих его молекул.



Формулы для теплоемкости идеального газа приблизительно верно описывают эксперимент, причем, в основном, для одноатомных газов. Согласно формулам, полученным выше, теплоемкость не должна зависеть от температуры. На самом деле наблюдается картина, изображенная на рис., полученная опытным путем для двухатомного газа водорода. На участке 1 газ ведет себя как система частиц, обладающих лишь поступательными степенями свободы, на участке 2 возбуждается движение, связанное с вращательными степенями свободы и, наконец, на участке 3 появляются две колебательные степени свободы. Ступеньки на кривой хорошо согласуются с формулой (2.35), однако между ними теплоемкость растет с температурой, что соответствует как бы нецелому переменному числу степеней свободы. Такое поведение теплоемкости указывает на недостаточность используемого нами представления об идеальном газе для описания реальных свойств вещества.

2.2.4. Равновесные процессы в идеальном газе

Если макроскопические параметры системы имеют одинаковые значения во всем объеме, занимаемом системой, и не изменяются с течением времени, то состояние системы является равновесным. Последовательный переход системы из одного равновесного состояния в другое, совершаемый достаточно медленно, так, что в любой заданный момент времени систему можно характеризовать определенными равновесными значениями термодинамических параметров: давления, температуры или объема, **называется равновесным процессом**.

Равновесный процесс представляет собой приближенную модель реального термодинамического процесса. Рассмотрим, например, сжатие газа поршнем в закрытом сосуде. Если поршень вдвигать достаточно быстро, то давление поршня на газ не будет успевать распространяться по всему объему, занятому газом. Давление газа на поршень в каждый момент времени будет больше, чем давление газа на стенки сосуда. Состояние газа в этом случае нельзя характеризовать определенной величиной давления, оно будет существенно неравновесным. Со временем давление перераспределится по всему объему и состояние газа станет равновесным с новым значением давления. Время установления нового состояния равновесия газа определяется его плотностью и температурой. Процесс установления термодинамического равновесия в системе носит название релаксационного процесса, а время установления равновесия — времени релаксации.

В случае, когда газ под действием поршня сжимается достаточно медленно, давление успевает равномерно распределиться по всему объему, и в газе в любой заданный момент времени устанавливается равновесие. Таким образом, при медленном движении поршня газ проходит последовательно через ряд равновесных состояний, и процесс термодинамически равновесный. Для того чтобы процесс был равновесным, очевидно, необходимо, чтобы время релаксации в системе было меньше времени, в течение которого система подвергается внешнему возмущению.

Рассмотрим ряд равновесных процессов в идеальном газе, имеющих важное значение в термодинамике. При равновесных процессах термодинамические параметры P, V и T в каждый момент времени связаны между собой уравнением состояния (2.8).

1) Изотермический процесс.

При изотермическом процессе температура газа остается постоянной в течение всего процесса. Уравнение состояния газа в этом случае имеет вид:

$$P = \nu \frac{RT}{V}. \qquad (2.37)$$

При заданной температуре состояние газа изображается точкой на плоскости, где по осям отложены давление и объем. Последовательность таких точек образует кривую, представляющую изотермический процесс. В случае изотермического процесса кривая является гиперболой и называется **изотермой**. Разным температурам газа соответствуют различные изотермы.

Вычислим работу, производимую газом при изотермическом процессе. Поскольку температура газа остается постоянной $dT = 0$, при термодинамическом процессе не изменяется внутренняя энергия газа, $dE=0$, т.е. все подводимое в систему тепло расходуется только на совершение механической работы $dQ = PdV$. Таким образом,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (2.38)$$

При изотермическом сжатии газа механическая работа, совершаемая над системой, переходит в тепловую энергию окружающих тел.

2) Изобарический процесс.

Этот термодинамический процесс происходит при постоянном давлении. Ему соответствуют на диаграмме P,V горизонтальные прямые — изобары, определяемые уравнением состояния:

$$V = \frac{\nu R}{P} T = const \cdot T. \qquad (2.39)$$

Работа при изобарическом процессе пропорциональна разности объемов газа в начальном и конечном состояниях:

$$A = P\int_{V_1}^{V_2} dV = P(V_2 - V_1). \qquad (2.40)$$

3) Изохорический процесс.

Зависимость давления от температуры при постоянном объеме представляет собой в координатах P, V вертикальную прямую, называемую изохорой. Поскольку при этом процессе $dV = 0$, работа равна нулю.

4) Адиабатический процесс происходит в системе без теплообмена с окружающей средой, т. е. $dQ = 0$. Из первого начала термодинамики (2.32) следует, что при таком процессе $dE = - Pd\,V$, т. е. изменение внутренней энергии системы происходит только за счет совершения работы. Выразим изменение внутренней энергии через теплоемкость при постоянном объеме согласно формуле

(3.34): $dE = \nu \cdot C_V \cdot dT$.Тогда

$$\nu \cdot C_V \cdot dT = - PdV. \qquad (2.41)$$

Отсюда следует, что при адиабатическом расширении газа $dV > 0$, $dT < 0$, и газ охлаждается. При сжатии газа, наоборот, происходит его нагревание и соответственно увеличение внутренней энергии.

Разделив выражение (2.41) соответственно на правую и левую части уравнения состояния $\nu \cdot R \cdot T = P \cdot V$, интегрируя это соотношение, получим

$$\frac{R}{C_V}\lg V = -\ln T + const$$

Наконец, воспользовавшись связью между C_P и C_V (2. 36) в виде $R = C_P - C_V$ и вводя определенную ранее характерную для газа величину $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$, получим окончательное соотношение между давлением и объемом идеального газа при адиабатическом процессе

$$PV^{\gamma} = const. \qquad (2.42)$$

Полученное уравнение называется уравнением **адиабаты**. На плоскости P, V она изображается кривой, которая спадает более круто, чем изотерма ($\gamma > 1$).

Работа при адиабатическом процессе пропорциональна изменению температур газа в начальном и конечном состояниях:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = -\nu C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = -\nu C_V \left(T_2 - T_1\right). \qquad (2.43)$$

Все указанные процессы можно рассматривать как частные случаи общего более сложного процесса, при котором давление и объем связаны уравнением

$$PV^{n} = const. \qquad (2.44)$$

При $n = 0$ уравнение описывает изобару, при $n = 1$ — изотерму, при $n = \gamma$ —адиабату, а при $n = \infty$ — изохору. Реальный неидеализированный процесс соответствует промежуточным значениям показателя степени в уравнении (2.44).

2.2.5. Уравнение состояния неидеального газа

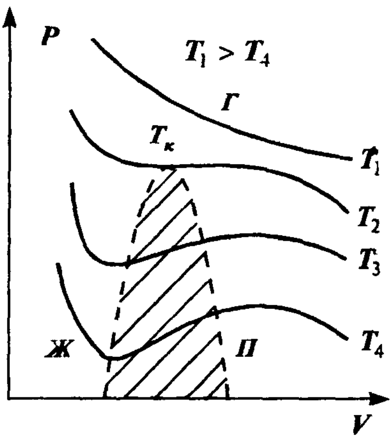
Простая и удобная модель идеального газа применима в основном к разреженным газам, что соответствует малой плотности вещества. При больших давлениях и низких температурах возникают значительные отклонения от уравнения Клапейрона-Менделеева (2.8), что указывает на несоответствие модели идеального газа его реальному состоянию. Это означает, что уравнение состояния следует видоизменить, причем в его новом виде надо учесть отличие реальных молекул газа от модели невзаимодействующих материальных точек.

Прежде всего нужно учесть, что молекулы занимают вполне определенный объем в пространстве. Следовательно, область пространства, доступная для движения реальных частиц газа, не равна геометрическому объему, занимаемому газом, а меньше его на величину собственного объема молекул. Это обстоятельство легко учесть, если вместо геометрического объема теперь писать $V - b$, где b — константа, характеризующая объем, занимаемый молекулами данного газа.

Далее необходимо заметить, что между реальными молекулами, имеющими сложную внутреннюю структуру, существуют силы взаимодействия. Эти силы имеют характер притяжения на сравнительно больших расстояниях и отталкивания на малых расстояниях. Вообще говоря, эти силы проявляются лишь при достаточном сближении молекул, поэтому в разреженных газах их можно не учитывать. Однако при низких температурах, когда энергия теплового движения молекул мала, и при больших давлениях, когда плотность газа возрастает, силы взаимодействия между молекулами начинают играть значительную роль. Макроскопически они проявляются в реальном газе как внутреннее давление, дополнительное к тому, которое обусловлено столкновениями молекул. Это дополнительное давление обусловлено взаимодействием молекул. Поскольку во взаимодействии принимают участие две группы молекул, число каждой из которых пропорционально плотности газа, то поправка к давлению пропорциональна квадрату плотности, то есть обратна пропорциональна второй степени геометрического объема, занимаемого газом. Таким образом, видоизмененное уравнение состояния принимает вид:

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT\ , \qquad (2.45)$$

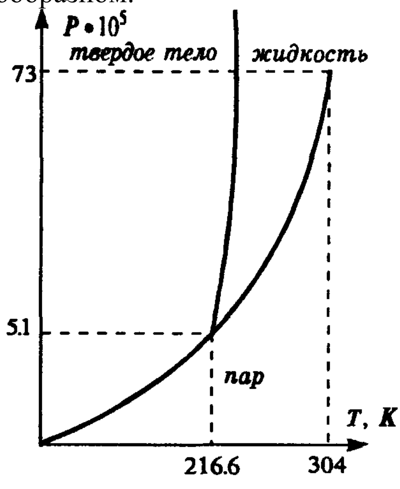
где а — другая константа, специфическая для данного газа и учитывающая характер сил взаимодействия между его молекулами. Уравнение (2.45) носит название уравнения Ван-дер-Ваальса. Когда объем газа становится достаточно большим, т. е., газ разрежен, поправками, связанными с отклонениями от идеальности, можно пренебречь и уравнение Ван-дер-Ваальса (2.45) переходит в уравнение Клапейрона-Менделеева(2.8).



Уравнение Ван-дер-Ваальса по сравнению с уравнением состояния идеального газа содержит ряд особенностей, отвечающих качественно новому поведению реального газа в области низких температур и больших плотностей. Как можно видеть из выражения (2.45), уравнение Ван-дер-Ваальса есть уравнение третьей степени относительно объема. Это означает, что при фиксированных температуре и давлении состояние газа может характеризоваться либо одним, либо тремя значениями *V*. На рис. изображены изотермы, соответствующие уравнению (2.45). При высоких температурах изотермы представляют собой кривые, характерные для идеального газа. При понижении температуры до определенной величины, которая называется критической, появляется характерный перегиб, ниже которого каждому значению давления отвечают три значения объема газа. Поэтому при данном давлении вещество может находиться в одном из трех возможных состояний или фаз. Состояние с минимальным объемом отвечает большей плотности вещества та. соответствует конденсации газа в жидкое состояние — жидкой фазе.

Состоянию с максимально возможным объемом отвечает газообразное состояние вещества. Промежуточное значение объема соответствует неустойчивому состоянию — его называют переохлажденный пар или перегретая жидкость. В этой области небольшие изменения давления вызывают немедленный переход вещества в одно из стабильных состояний. На рис. область существования неустойчивых состояний заштрихована.

Она отделяет области существования жидкой и газообразной фаз вещества. Таким образом, важным следствием уравнения состояния неидеально газа является возможность фазового перехода вещества из одного состояния в другое. Кривые на диаграммах *P,V* или *V,T*, отделяющие области существования разных фаз, — это кривые фазового равновесия. Они показывают, при каких значениях параметров вещество может существовать в одном из состояний — твердом, жидком либо газообразном.



На рис. в координатах *P*, T изображена, например, фазовая диаграмма для двуокиси углерода, на которой показаны области существования всех трех возможных фаз. Критическая температура для CO_2 равна 216,6 К, что составляет — 56,6 С. При обычных температурах и давлениях жидкая фаза не реализуется. В твердой фазе CO_2 представляет собой сухой лед. Он потому и называется сухой, что имеет низкую температуру, но не плавится, а сразу превращается в газовую фазу.

2.2.6. Обратимые и необратимые процессы

Новой качественной особенностью систем большого числа частиц по сравнению с чисто механическими системами является необратимый характер термодинамических процессов. Если рассматривать движение тела как механический процесс, в результате которого происходит изменение его координат и скоростей, то очевидно, что в механике без учета сил трения все процессы обратимы. Обратимость механического процесса означает, что если изменить направление процесса на обратное, то тело, обладающее определенными значениями координат и скорости в конечном состояний, будет проходить последовательность тех же состояний, которую оно проходило при первоначальном направлении процесса, но в обратном порядке и в конце процесса окажется опять в состоянии с начальными значениями координат и скорости. Таково, например, упругое столкновение шаров, которое может происходить как в прямом, так и в обратном направлениях. Этот факт — прямое следствие второго закона Ньютона, сохраняющего постоянной полную механическую энергию системы. Запишем его в форме

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} .$$

Второй закон Ньютона представляет собой уравнения движения тела. Решив эти уравнения относительно координат и импульса как функций времени, можно определить с достоверностью их значения в любой последующий момент времени, если известны значения этих величин в начальный момент: $r(0)$ и $p(0)$. С такой же достоверностью можно, пользуясь уравнениями Ньютона, проследить за движением тела в обратном направлении. Если заменить в законе Ньютона t на $-t$ и p на $-p$, то уравнения движения не изменятся. Это означает, что если известны координаты и скорости тела в конечном состоянии, можно определить их значения в любой заданный момент в прошлом. Таким образом, задание начальных или конечных условий полностью определяет поведение механической системы в будущем или в прошлом.

Иная ситуация возникает в системах, состоящих из большого числа частиц. Каждая частица в отдельности, конечно, попрежнему подчиняется уравнениям движения в форме второго закона Ньютона. Отличие состоит в том, что в системе большого числа частиц каждая отдельная частица испытывает большое число последовательных столкновений с другими частицами. Поскольку столкновения имеют случайный характер и изменяют координаты и скорости данной частицы непредсказуемым образом, то информацию о состоянии данной частицы по прошествии некоторого времени в системе большого числа частиц можно теперь определить не с достоверностью, как в механике, а только с некоторой вероятностью. Поскольку всякий термодинамический процесс включает в себя множество независимых случайных событий, то для того, чтобы он мог происходить в обратном направлении, необходимо, чтобы реализовалась вся эта случайная последовательность событий в обратном порядке. Поскольку вероятность нескольких независимых событий есть произведение вероятностей каждого из событий, то суммарная вероятность обратного процесса оказывается ничтожно малой, практически равной нулю. В качестве примера такого процесса укажем на процесс передачи тепла от более нагретого тела менее нагретому —обратный процесс, как известно, сам но себе никогда не реализуется на практике. Таким образом, физическая причина необратимости термодинамических процессов заключается в случайном характере столкновений частиц, который создает неопределенность в начальных условиях к уравнениям движения частиц.

Реальный термодинамический процесс всегда необратим. Тем не менее в термодинамике говорят об обратимом процессе как о некоторой идеализированной схеме процесса. Рассмотрим некоторый равновесный процесс, совершаемый системой под влиянием внешнего воздействия так, что система последовательно проходит через ряд равновесных состояний из начального в конечное. Если ту же последовательность состояний можно реализовать в обратном порядке и при этом не изменить состояния окружающих тел, то процесс будет **обратимым**. При этом каждая из частиц системы вовсе не вернется в свое исходное состояние, важно только, что средние, равновесные характеристики системы примут свои начальные значения, а это происходит при обратимом процессе благодаря неразличимости или тождественности частиц системы.

2.2.7. Неравновесные процессы

Вследствие необратимости термодинамических процессов все процессы в изолированной системе протекают лишь в одном направлении — в направлении приближения системы к состоянию теплового равновесия. Будучи выведена из состояния равновесия, система переходит в новое состояние равновесия спустя некоторое время — время релаксации. Оно зависит от температуры, давления, плотности системы, а также от характера взаимодействия между частицами. Переход системы к равновесному состоянию представляет собой необратимый процесс, поскольку вероятность самопроизвольного перехода равновесной системы в неравновесное состояние ничтожно мала.

Рассмотрим некоторые механизмы неравновесной релаксации системы к состоянию равновесия. Прежде всего, введем понятие длины свободного пробега молекул. Индивидуальные особенности движения отдельных молекул не играют роли в системе большого числа частиц, поэтому под *длиной свободного пробега* ℓ понимают среднюю длину пути молекулы в газе между столкновениями. Поскольку столкновения носят случайный характер, длина свободного пробега имеет вероятностный смысл: величина ℓ тем меньше, чем больше вероятность столкновения молекул. В свою очередь, вероятность столкновения молекул определяется их плотностью и размерами молекул. Наряду с длиной свободного пробега другой важной характеристикой является *среднее время свободного пробега*

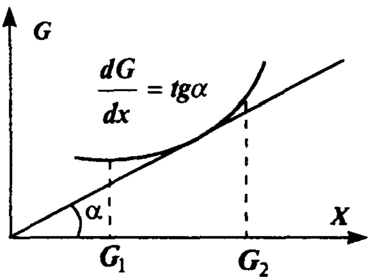
$$t = \ell/v, \qquad (2.46)$$

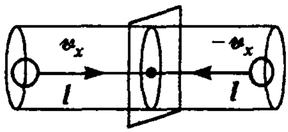
где v — средняя скорость теплового движения молекул. Обе введенные здесь величины в существенной степени определяют скорость релаксационного процесса.

Механизм процесса релаксации состоит в том, что при выведении системы из состояния равновесия в газе возникает поток соответствующей величины: тепла, массы, концентрации частиц в зависимости от того, каким способом система была выведена из состояния равновесия. При приближении системы к равновесию этот поток исчезает, перераспределяясь по всей системе.

Определим поток произвольной физической величины как изменение этой величины в единицу времени в какой-либо точке пространства

$$i = -\frac{\Delta G}{\Delta t}, \qquad (2.47)$$





где ΔG — разность значения величины G в соседние моменты времени. Знак минус означает, что направление потока противоположно направлению возрастания величины. Само по себе изменение величины G не зависит от времени явно, а связано с ее неоднородным распределением в пространстве, например, вдоль оси X (см. рис.). Поэтому перепишем выражение для потока в виде: $i = -\frac{\Delta G}{\Delta t} = -\frac{\Delta G}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = -v\frac{\Delta G}{\Delta t}$.

При получении формулы для полного потока это выражение нужно умножить на число частиц — носителей величины G, которые в состоянии пересечь в единицу времени единичную площадку, перпендикулярную оси X. Число таких частиц равно числу частиц, движущихся параллельно оси X и отстоящих от указанной площадки на расстояние, не большее длины свободного пробега ℓ, т. е. заключенных в объеме, основание которого единица, а длина равна 2ℓ. Число частиц в единице объема» движущихся в направлении оси X, равно $n/6$ и (ввиду равновероятности движения в любом из возможных шести направлений). Полный поток величины

G равен

$$I = \frac{1}{6} n \cdot 2\ell \cdot i = -\frac{nv\ell}{3} \frac{\Delta G}{\Delta x}. \qquad (2.48)$$

Величина $\frac{\Delta G}{\Delta x}$ представляет собой градиент G в направлении оси X. Таким образом, если в системе имеется неоднородное распределение какой-либо физической величины, то возникает поток этой величины, обусловленный столкновением частиц и пропорциональный ее *rwl* градиенту. Величина $nv\ell/3$ коэффициент переноса.

Рассмотрим конкретные процессы переноса.

Теплопроводность. Пусть системе сообщено некоторое количество тепла. При этом некоторая часть системы оказывается более нагретой, откуда тепло посредством столкновений распространяется по всему объему, т. е. возникает поток тепла. Переносимая физическая величина в этом случае — тепло, значит $G = Q$. Поскольку количество тепла характеризуется температурой $Q = C_V T$, где C_V — теплоемкость вещества, то, подставляя вместо G в общую формулу (2.48) это выражение, получим: $I_Q = -\frac{nv\ell}{3} C_V \frac{\Delta T}{\Delta x}$.

Следовательно, поток тепла пропорционален градиенту температуры. Величина $\chi = \frac{nv\ell C_V}{3}$ - коэффициент теплопроводности.

Диффузия. Если в систему добавляется некоторое количество частиц того или другого сорта, то в объеме возникает неоднородное распределение концентрации этих частиц и в силу указанных причин возникает поток концентрации этих частиц. Роль величины G играет относительная концентрация добавленных частиц $G = n'/n$. Процесс выравнивания концентраций, обусловленный механизмом столкновений, называется диффузией. Выражение для диффузионного потока, согласно (2.48), принимает вид:

$$I_n = -\frac{1}{3} v\ell \frac{\Delta n'}{\Delta x}, \qquad (2.50)$$

где коэффициент между потоком и градиентом концентрации представляет собой коэффициент диффузии $D = v\ell/3$.

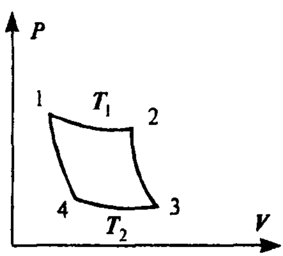
Вязкость. Предположим, что нам удалось механическим или иным способом сообщить механический импульс какой-либо части нашей системы. Тем самым в системе создается направленный поток частиц и распределение импульса частиц в плоскости, перпендикулярной потоку, становится неоднородным. Благодаря столкновениям частиц, происходит передача импульса направленного движения окружающим частицам, в результате чего возникает перераспределение переданного импульса. Этот процесс, который можно рассматривать как диффузию в пространстве импульсов, называется вязкостью, или внутренним трением. Переносимой величиной является импульс частицы, который мы обозначим здесь через mu; u обозначает здесь направленную скорость частиц в отличие от тепловой скорости. Поток импульса

$$I_p = -\frac{mnv\ell}{3}\frac{\Delta u}{\Delta x}, \qquad (2.51)$$

а коэффициент вязкости среды $\nu = nvn\ell/3 = pv\ell/3$.

2.2.8. Тепловые машины

Термодинамика как наука развилась в начале XIX века из необходимости объяснить работу тепловых машин. Термодинамические расчеты необходимы при конструировании любых машин, способных производить работу. Тепловой машиной называется устройство, использующее тепловую энергию для совершения механической работы. В этом смысле и паровой двигатель, и атомный реактор эквивалентны.



Тепловая машина состоит из нагревателя, рабочего тела и охладителя рабочего тела. Охладителем, в конечном счете, служит окружающая среда. Тепловая машина работает по принципу замкнутого цикла, совершая круговой процесс.

В ходе прямого цикла рабочее тело, например, пар, получив от нагревателя количество тепла Q_1, расширяется от объема V_1 до объема V_3. Согласно первому закону термодинамики, это тепло расходуется на нагревание рабочего тела и на совершение механической работы

$$Q_1 = E_2 - E_1 + A_{13}, \qquad (2.52)$$

где $E_2 - E_1$ — изменение внутренней энергии рабочего тела при переходе из состояния 1 в состояние 3. При обратном цикле над газом производится работа: газ сжимается и передает охладителю количество тепла

$$-Q_2 = E_1 - E_2 + A_{31}. \qquad (2.53)$$

Складывая оба уравнения, получим $Q_1 - Q_2 = A_{13} + A_{31} = A$, где А — полная работа, совершенная машиной за один цикл.

Отношение полезной работы, совершенной машиной, к количеству полученного тепла составляет КПД тепловой машины

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}. \qquad (2.54)$$

Понятно, что КПД машины всегда меньше единицы, поскольку не все количество полученного тепла переходит в полезную работу.

В реальных тепловых машинах КПД, очевидно, еще меньше, так как часть тепла теряется безвозвратно в процессе работы машины. Для получения максимального КПД следует рассмотреть рабочий цикл, образованный обратимыми процессами. Этому требованию отвечает цикл (см. рис.), впервые рассмотренный французским ученым Карно. В качестве рабочего тела в цикле Карно рассматривается идеальный газ. Цикл Карно состоит из последовательных расширения и сжатия газа, причем каждый из процессов совершается сначала изотермически, а затем адиабатически. При прямом цикле тело по-прежнему сначала получает тепло, а затем отдает его. Достоинство цикла Карно состоит в том, что все процессы обратимы, и, следовательно, КПД такой машины будет максимальным.

Пусть газ расширяется изотермически, переходя из состояния 1 в состояние 2. При изотермическом процессе внутренняя энергия газа не изменяется, и количество полученного тепла Q_1 равно работе A_{12}. По формуле (2.38):

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (2.55)$$

На участке 2-3 газ расширяется адиабатически. На участке 3-4 он сжимается опять изотермически, для чего охладителю должно быть отдано тепло Q_2. Работа на участке 3-4 равна - Q_2, причем

$$-Q_2 = A_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \qquad (2.56)$$

Наконец, на участке 4-1 газ адиабатически сжимается, возвращаясь к исходному состоянию. Воспользуемся уравнением адиабаты (2.42), заменив в нем, согласно уравнению состояния PV, на $\nu \cdot RT$. Уравнение адиабаты принимает вид:

$$TV^{\gamma-1} = const. \qquad (2.57)$$

Для процессов 2-3 и 4-1 цикла Карно отсюда следует:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}; \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим $V_2/V_1 = V_3/V_4$. После подстановки этого выражения в (2.56) найдем:

$$Q_1 - Q_2 = \nu R(T_1 - T_2)\ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (2.58)$$

Подставляя (2.58) в формулу (2.54), получим выражение для КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (2.59)$$

Из формулы (2.59) следует, что КПД тепловой машины определяется только разностью температур нагревателя и холодильника. КПД не зависит ни от свойств рабочего тела, используемого в машине, ни от свойств самой машины. Полученный результат показывает, что при $T_1 = T_2$ КПД машины равен нулю, т. е. машина не совершает работы. Работа максимальна ($\eta = 1$) при $T_2 = 0$. Таким образом, машина тем выгоднее, чем ниже температура охладителя.

2.2.9. Энтропия

Мы убедились, что КПД необратимого кругового процесса всегда меньше, чем КПД при обратимом цикле. Этот результат можно сформулировать в следующем виде:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \le \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Знак равенства соответствует случаю обратимых процессов. Отсюда нетрудно получить соотношение, которое играет важную роль в термодинамике:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \le 0. \qquad (2.61)$$

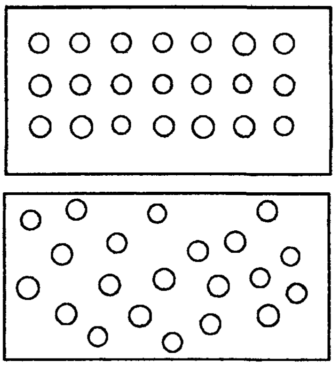
Величина $\dfrac{Q}{T}$ называется энтропией. Она, как видно из полученного соотношения, остается неизменной при обратимом процессе и возрастает, если термодинамический процесс необратим. Энтропия — важная термодинамическая характеристика системы, такая же, как, например, внутренняя энергия. Утверждение, что при необратимых процессах энтропия замкнутой системы возрастает, составляет содержание *второго начала термодинамики.*

Возрастание энтропии системы при необратимом процессе выражает тот факт, что тепло само по себе не может переходить от менее нагретых к более нагретым телам. Последнее утверждение можно рассматривать также как формулировку второго начала термодинамики.

Из изложенного следует важный вывод. Поскольку КПД реальной тепловой машины всегда меньше, чем КПД идеальной машины (работающей по циклу Карно), а обязательным условием работы последней является необходимость отдавать тепло более холодному телу, становится очевидной невозможность создания так называемого вечного двигателя второго рода — устройства, осуществляющего круговорот тепла в природе и одновременно превращающего все полученное тепло в механическую работу.

Понятие энтропии имеет глубокий физический смысл, едва ли не больший, чем понятие энергии. Поскольку, как это следует из соотношения (2.61), энтропия остается постоянной при обратимом характере процесса и возрастает при необратимых процессах, энтропию рассматривают как меру необратимости термодинамического процесса. В состоянии термодинамического равновесия энтропия системы максимальна.

Рассмотрим, что представляет собой состояние термодинамического равновесия. В состоянии равновесия система однородна: все средние характеристики системы, такие, как концентрация, давление, температура, одинаковы во всех ее макроскопических частях. Равновесная система изотропна: в системе не существует направленного движения частиц или потока какой-либо другой физической величины. Иными словами, все направления движения равновероятны, и частицы совершают полностью хаотическое тепловое движение. Таким образом, состояние равновесия, с точки зрения статистической физики, представляет собой состояние полного беспорядка, в то время как состояние, отличное от равновесного, характеризуется существованием в системе направленного, т. е. упорядоченного движения. Указанное отличие равновесного состояния от неравновесного дает возможность рассматривать энтропию как количественную меру беспорядка, существующего в системе.



Беспорядочное либо упорядоченное расположение молекул в заданном объеме можно характеризовать количеством способов, которым можно расположить молекулы в этом объеме, не изменяя состояния системы. Ясно, что беспорядочно можно расположить молекулы значительно большим количеством способов (рис.).

Отношение этого числа возможных способов к полному числу всевозможных способов (включающих и изменение состояния или конфигурации системы) образует вероятность Р данного состояния в общем числе возможных состояний системы. Таким образом, можно связать величину энтропии с вероятностью данного состояния. При этом надо учесть, что энтропия так же, как и энергия системы, есть величина аддитивная, т. е. энтропия системы, состоящей из нескольких частей, равна сумме отдельных энтропий. Что же касается вероятности, то это величина мультипликативная — вероятность определенного состояния всей системы равна произведению вероятностей соответствующих состояний отдельных ее частей и даже отдельных молекул. Однако аддитивной является не сама вероятность, а ее логарифм, и именно с этой величиной естественно связать энтропию системы. Коэффициентом пропорциональности между ними должна служить постоянная Больцмана, поскольку по определению $S = Q/T$, *а* $Q = kT$ есть как раз тепловая энергия. Окончательно

$$S = k \cdot lnP. \tag{2.62}$$

Это соотношение и есть известная формула Больцмана, выражающая статистическую трактовку энтропии.

2.2.10. Энтропия идеального газа

Рассмотрим изменение энтропии идеального газа при изотермическом расширении его от объема V_1 до V_2.

Согласно формуле (2.38) совершаемая при этом механическая работа

$$A = \nu RT \ln \frac{V_4}{V_3}. \tag{2.63}$$

При изотермическом процессе работа равна теплу, переданному или отданному системой A = ΔQ. По определению $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$ и, стало быть, энтропия

$$A = \frac{\Delta Q}{T} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{2.64}$$

Это же выражение можно получить и непосредственно из определения (2.62). Пусть молекула газа находятся в объеме V. Вероятность нахождения одной молекулы в объеме V пропорциональна объему V. Вероятность нахождения N молекул в этом же объеме пропорциональна V^N, поскольку эта вероятность представляет собой вероятность N независимых событий. Таким образом, изменение энтропии при расширении газа есть

$$\Delta S = k \ln V_2^N - k \ln V_1^N = Nk \ln \frac{V_2}{V_1},$$

что аналогично формуле (2.64).

2.2.11. Энтропия и информация

При рассмотрении процесса передачи тепла от более нагретого к менее нагретому телу было введено понятие энтропии. Этот процесс необратим, и энтропия служит мерой его необратимости. Физическая причина необратимости — переход от состояния, характеризуемого упорядоченным распределением какой-либо физической величины, к состоянию беспорядка, и, следовательно, энтропия — это количественная мера возникающего беспорядка. Последнее обстоятельство позволяет использовать понятие энтропии более широко: для характеристики и анализа любых необратимых процессов в окружающем нас мире, в том числе связанных с деятельностью человека, который является частью природы и часто вносит в нее необратимые изменения.

С технической и научной точки зрения XX век поставил перед человечеством три наиболее значительных проблемы: проблему энергетики, проблему обработки и передачи информации и, наконец, проблему экологии — борьбы с загрязнением окружающей среды. Эти проблемы тесно связаны друг с другом и иногда, успешно решая одну из них, мы ухудшаем состояние двух других. Поэтому необходимо уметь оценивать все стороны того или иного технического решения, количественно рассчитывать не только выигрыш, получаемый от реализации этого решения, но и плату за него. Одной из величин, которые позволяют производить такие расчеты, является энтропия.

В 1948 г. американский инженер К. Шеннон заметил, что проблемы передачи и обработки информации имеют много общего с проблемами статистической физики и могут быть описаны на том же языке с помощью понятия энтропии. Под информацией обычно понимается сообщение, содержащее элемент новизны. Оно может быть передано по каналам связи посредством сигналов, имеющих различную физическую природу. Для передачи сигналов могут использоваться электромагнитные волны радиодиапазона или видимого света (оптическая связь) или звуковые волны (акустическая связь). Помехи, которые имеются в линиях связи, приводят к искажению сигналов. Кроме того, сигналы могут искажаться при их преобразовании в устройствах, используемых в линиях связи. Все это приводит к тому, что передаваемый сигнал приходит по назначению не с достоверностью, а с некоторой конечной вероятностью. Вероятность получения сигнала зависит от способов и условий передачи информации и может быть рассчитана. Механизм передачи информации можно сравнить с движением молекулы в газе, испытывающей множество случайных столкновений, в результате которых можно указать только вероятность ее прихода в заданную точку пространства.

По аналогии со статистической физикой случайный беспорядок, возникающий в системе передаваемых сигналов, характеризуется с помощью энтропии системы, которая пропорциональна логарифму вероятности прихода сигнала. С помощью таким образом введенной энтропии можно определить и количество информации, содержащееся в переданном сообщении. Развитие этих представлений привело к созданию новой самостоятельной науки — теории информации, которая, в свою» очередь, легла в основу науки об управлении сложными системами — кибернетики.

Другая проблема, в которой широко используется понятие энтропии, — это проблема экологии. Необратимые изменения в окружающей среде, возникающие в процессе человеческой деятельности, также подчиняются законам термодинамики. Их отличие, правда, состоит в том, что мир, в котором мы существуем, представляет собой не замкнутую, а открытую систему, постоянно взаимодействующую со всей Вселенной путем энерго- и массообмена. Термодинамика такой открытой системы очень сложна, и поэтому выводы, следующие из рассмотренной термодинамики замкнутой системы, к ней неприменимы. Однако методы рассмотрения, основанные на статистическом подходе, остаются прежними и позволяют сделать важные заключения о процессах, происходящих в живой природе.

Характерным примером здесь является процесс теплообмена Земли с окружающим пространством. Если рассматривать часть Вселенной, которой принадлежит наша планета, как совокупность физических объектов, образующих замкнутую систему, то согласно обычной термодинамике она неизбежно должна прийти в состояние теплового равновесия, в котором все тела имеют одинаковую температуру; процессов переноса тепла от более нагретых тел к менее нагретым не существует — возникает состояние «тепловой смерти». В открытой системе заключение о неизбежной тепловой смерти системы неправомерно — в такой системе происходит бесконечный теплообмен с окружающей средой. Кроме того, в системах, бесконечных в пространстве и времени, к которым относится наша Вселенная, нельзя исключить возникновения процессов, которые имеют малую вероятность и не могут происходить в замкнутых системах.

Значительные изменения в окружающую среду вносит деятельность человека. Технический прогресс и рост промышленного производства привел к тому, что результаты человеческой деятельности стали отрицательно влиять на состояние природы планеты. Повышается средняя температура атмосферы — происходит так называемое «тепловое загрязнение» атмосферы, изменяется ее химический состав, меняется состав недр Земли, ухудшается состояние водных ресурсов и поверхности Земли, возникает радиоактивное заражение поверхности, начинают изменяться в нежелательном направлении условия биологического существования. Все это требует принятия срочных мер по более рациональному развитию производительных сил.

С точки зрения термодинамики, деятельность человека, во-первых, имеет направленный, организующий характер, ведь в конечном счете цель человеческой деятельности — превращение окружающего мира в упорядочение работающую систему. Этот процесс организации среды приводит к уменьшению беспорядка и, следовательно, к уменьшению энтропии. Таким образом, деятельность человека, строго говоря, «работает» против второго начала термодинамики. Во-вторых, продукты этой деятельности — отходы в виде неиспользованного тепла, химические отходы и другие неполезные продукты деятельности — приводят к загрязнению окружающей среды, тем самым увеличивая энтропию всей системы. Проблема экологии и заключается в том, чтобы в процессе человеческой деятельности минимально увеличивать энтропию окружающей среды.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. За время изучения курса общей физики студент-заочник должен представить в учебное заведение в зависимости от специальности от двух до шести контрольных работ.

2. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по таблицам вариантов (см., например, с. 35).

3. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке которой привести сведения по следующему образцу:

Студент факультета СПбГТУКиселев А. В. Номер зачетной книжки 257320 Адрес: г. Луга Ленинградской обл. ,ул. Чехова, 2, кв. 5. Контрольная работа 1 по физике

4. Условия задач в контрольной работе надо переписать полностью без сокращении. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставлять поля.

5. В конце контрольной работы указать, каким учебником или учебным пособием студент пользовался при изучении физики (название учебника, автор, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент в случае необходимости мог указать, что следует студенту изучить для завершения контрольной работы.

6. Высылать на рецензию следует одновременно не более одной работы. Во избежание одних и тех же ошибок очередную работу следует высылать только после получении рецензии на предыдущую.

7. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, решения которых оказались неверными. Повторную работу необходимо представить вместе с незачтенной.

8. Зачтенные контрольные работы предъявляются экзаменатору. Студент должен быть готов во время экзамена дать пояснения по существу решения задач, входящих в контрольные работы.

9. Решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями; в тех случаях, когда это возможно, дать чертеж, выполненный с помощью чертежных принадлежностей.

10. Решать задачу надо в общем виде, т. е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.

11. После получения расчетной формулы для проверки правильности ее следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин обозначения единиц этих величин, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.

12. Числовые значения величин при подстановке их в расчетную формулу следует выражать только в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

13. При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.

14. Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений (см. в «Задачнике по физике» А. Г. Чертова, А. А. Воробьева Приложение о приближенных вычислениях). Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

1. МЕХАНИКА

Задачи для самостоятельного решения.

1. Точка движется по окружности радиусом R = 4 м. Закон ее движения выражается уравнением $s = A + B \cdot t^2$, где A = 8 м, B = —2

м/с^2. Определить момент времени t, когда нормальное ускорение a_n точки равно 9 м/с^2. Найти скорость v, тангенциальное a_τ и полное a ускорения точки в тот же момент времени t. [1,5 с; -6 м/с; - 4 м/с^2; 9,84 м/с^2]

2. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1 = A_1t + B_1t + C_1 t^3$ и $x_2 = A_2t + B_2t + C_2 t^3$, где A_1 =4 м/с, B_1 =8 м/с^2, C_1 =-16 м/с^3, A_2 = 2 м/с, B_2 = =-4 м/с^2, C_2 = 1 м/с^3. В какой момент времени t ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости v_1 и v_2 точек в этот момент. [0,235 с; 5,1 м/с; 0,286 м/с].
3. Шар массой m_1 = 10 кг сталкивается с шаром массой m_2 = 4 кг. Скорость первого шара v = 4 м/с, второго—v_2 = 12 м/с. Найти общую скорость и шаров после удара в двух случаях: 1) малый шар нагоняет большой шар, движущийся в том же направлении; 2) шары движутся навстречу друг другу. Удар считать прямым, центральным, неупругим. *[*6,28 м/с; - 0,572 м/с*]*.
4. В лодке массой M = 240 кг стоит человек массой m = 60 кг. Лодка плывет со скоростью v = 2 м/с. Человек прыгает с лодки в горизонтальном направлении со скоростью u= 4м/с (относительно лодки). Найти скорость лодки после прыжка человека: 1) вперед по движению лодки; 2) в сторону, противоположную движению лодки. [1 м/с; 3 м/с].
5. Человек, стоящий в лодке, сделал шесть шагов вдоль нее и остановился. На сколько шагов передвинулась лодка, если масса лодки в два раза больше (меньше) массы человека? [2 шага; 4 шага]
6. Из пружинного пистолета выстрелили пулькой, масса которой m = 5г. Жесткость пружины k = 1,25 кН/м. Пружина была сжата на $\Delta\ell$ = 8 см. Определить скорость пульки при вылете ее из пистолета. [40 м/с].
7. Шар массой m_1 = 200 г, движущийся со скоростью v_1 = 10м/с, сталкивается с неподвижным шаром массой m_2 = 800 г. Удар прямой, центральный, абсолютно упругий. Определить скорости шаров после столкновения. [-6 м/с; 4 м/с].
8. Шар, двигавшийся горизонтально, столкнулся с неподвижным шаром и передал ему 64% своей кинетической энергии. Шары

абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Во сколько раз масса второго шара больше массы первого? [В 4 раза]

9. Цилиндр, расположенный горизонтально, может вращаться вокруг оси, совпадающей с осью цилиндра. Масса цилиндра m_1 = 12 кг. На цилиндр намотали шнур, к которому привязали гирю массой m_2 = 1 кг. С каким ускорением будет опускаться гиря? Какова сила натяжения шнура во время движения гири? [1,4 м/с^2; 8,4 Н]
10. Через блок, выполненный в виде колеса, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами m_1 = 100 г и m_2 = 300г. Массу колеса M = 200 г считать равномерно распределенной по ободу, массой спиц пренебречь. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, и силы натяжения нити по обе стороны блока. [3,27 м/с^2; 1,31 Н; 1,96 Н)
11. Двум одинаковым маховикам, находящимся в покое, сообщили одинаковую угловую скорость ω = 63 рад/с и предоставили их самим себе. Под действием сил трения маховик остановился через одну минуту, а второй сделал до полной остановки N= 360 оборотов. У какого маховика тормозящий момент был больше и во сколько раз? [У первого больше в 1,2 раза]
12. Шар скатывается с наклонной плоскости высотой h = 90 см. Какую линейную скорость будет иметь центр шара в тот момент, когда шар скатится с наклонной плоскости? *[*3,55 м/с*]*.
13. На верхней поверхности горизонтального диска, который может вращаться вокруг вертикальной оси, проложены по окружности радиусом г = 50 см рельсы игрушечной железной дороги. Масса диска M = 10кг, его радиус R = 60 см. На рельсы неподвижного диска был поставлен заводной паровозик массой m = 1 кг и выпущен из рук. Он начал двигаться относительно рельсов со скоростью v = 0,8 м/с. С какой угловой скоростью будет вращаться диск? *[*0,195 рад/с*]*.
14. Платформа в виде диска вращается по инерции около вертикальной оси с частотой n_1 = 14мин$^{-l}$. На краю платформы стоит человек. Когда человек перешел в центр платформы, частота возросла до n_2 = 25мин$^{-1}$. Масса человека m = 70 кг. Определить

массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки. [210 кг].

15. Искусственный спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите на, высоте Н = 3200 км над поверхностью Земли. Определить линейную скорость спутника. [6,45 км/с]
16. Точка совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени смещение точки x = 5см, скорость ее v = 20см/с и ускорение a = -80 см/с^2. Найти циклическую частоту и период колебаний, фазу колебаний в рассматриваемый момент времени и амплитуду колебаний, [4 с$^{-1}$; 1,57 с; π/4; 7,07 см].
17. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид $x = A\cdot sin(\omega t)$, где A = 5см, ω = 2 с$^{-1}$. Найти момент времени (ближайший к началу отсчета), в который потенциальная энергия точки $П$ = 10 $^{-4}$ Дж, а возвращающая сила F = +5·10^{-3} Н. Определить также фазу колебаний в этот момент времени *[*2,04 с; 4,07 рад*]*.
18. Два гармонических колебания, направленных по одной прямой, имеющих одинаковые амплитуды и периоды, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найти разность фаз складываемых колебаний. [120° или 240°]
19. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями $x = A_1\cdot cos\omega 1t$ и $y = A_2\cdot cos\ \omega(\tau + t)$, где A_1 = 4 см, ω = π с$^{-1}$, A_2 = 8 см, ω_2 = π с$^{-1}$, τ = 1 с. Найти уравнение траектории и начертить ее с соблюдением масштаба. *[*2x+y = 0*]*
20. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью v = 15 м/с. Период колебаний точек шнура T = 1,2 с. Определить разность фаз Δφ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях x_1 = 20 м и x_2 = 30м. [200°]

Контрольная работа 1 Таблица вариантов.

Вариант	Номера задач							
0	110	120	130	140	150	160	170	180
1	101	111	121	131	141	151	161	181
2	102	112	122	132	142	152	162	182
3	103	113	123	133	143	153	163	183
4	104	114	124	134	144	154	164	184
5	105	115	125	135	145	155	165	185
6	106	116	126	136	146	156	166	186
7	107	117	127	137	147	157	167	187
8	108	118	128	138	148	158	168	188
9	109	119	129	139	149	159	169	189

101. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0=4 м/с. Когда оно достигло верхней точки полета из того же начального пункта, с той же начальной скоростью v_0 вертикально вверх брошено второе тело. На каком расстоянии h от начального пункта встретятся тела? Сопротивление воздуха не учитывать.
102. Материальная точка движется прямолинейно с ускорением a = 5м/с^2. Определить, на сколько путь, пройденный точкой в n-ю секунду, будет больше пути, пройденного в предыдущую секунду. Принять v_0 = 0.
103. Две автомашины движутся по дорогам, угол между которыми α = 60°. Скорость автомашин v_1 = 54 км/ч и v_2 = 72 км/ч. С какой скоростью и удаляются машины одна от другой?
104. Материальная точка движется прямолинейно с начальной скоростью v_0 = 10 м/с и постоянным ускорением a = -5м/с^2. Определить, во сколько раз путь Δs, пройденный материальной точкой, будет превышать модуль ее перемещения Δr спустя t = 4 с после начала отсчета времени.

105. Велосипедист ехал из одного пункта в другой. Первую треть пути он проехал со скоростью v_1 = 18 км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью м$_2$ =22 км/ч, после чего до конечного пункта он шел пешком со скоростью v_3 = 5 км/ч. Определить среднюю скорость $v_{ср}$ велосипедиста.

106. Тело брошено под углом α = 30° к горизонту со скоростью v_0 =30 м/с. Каковы будут нормальное a_n и тангенциальное a_τ, ускорения тела через время t = 1 с после начала движения?

107. Материальная точка движется по окружности с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi/6$ рад/с. Во сколько раз путь Δs, пройденный точкой за время t = 4 с, будет больше модуля ее перемещения Δr? Принять, что в момент начала отсчета времени радиус-вектор r, задающий положение точки на окружности, относительно исходного положения был повернут на угол $\varphi_0 = \pi/3$ рад.

108. Материальная точка движется в плоскости xy согласно уравнениям $x = A_1 + B_1t + C_1 t^2$ и $y = A_2 + B_2t + C_2 t^2$, где B_1 =7 м/с^2, C_1 =-2 м/с^2, B_2 = -1 м/с^2, C_2 = 0,2 м/с^2. Найти модули скорости и ускорения точки в момент времени t = 5 с.

109. По краю равномерно вращающейся с угловой скоростью ω = 1 рад/с платформы идет человек и обходит платформу за время t = 9,9с. Каково наибольшее ускорение a движения человека относительно Земли? Принять радиус платформы R=2м.

110. Точка движется по окружности радиусом R = 30 см с постоянным угловым ускорением ε. Определить тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что за время t = 4 с она совершила три оборота и в конце третьего оборота ее нормальное ускорение a_n = 2,7 м/с^2.

111. При горизонтальном полете со скоростью v = 250 м/с снаряд массой m = 8 кг разорвался на две части Большая часть массой m_1 = 6 кг получила скорость u_1 = 400 м/с в направлении полета снаряда. Определить модуль и направление скорости u_2 меньшей части снаряда.

112. С тележки, свободно движущейся по горизонтальному пути со скоростью v_1 = 3 м/с, в сторону, противоположную движе-

нию тележки, прыгает человек, после чего скорость тележки изменилась и стала равной u_1 = 4 м/с. Определить горизонтальную составляющую скорости u_{2x} человека при прыжке относительно тележки. Масса тележки m_1 = 210 кг, масса человека m_2 = 70 кг.

113. Орудие, жестко закрепленное на железнодорожной платформе, производит выстрел вдоль полотна железной дороги под углом $\alpha = 30°$ к линии горизонта. Определить скорость u_2 отката платформы, если снаряд вылетает со скоростью u_1 = 480 м/с. Масса платформы с орудием и снарядами m_2 =18 т, масса снаряда m_1 = 60 кг.
114. Человек массой m_1 = 70 кг, бегущий со скоростью v_1 =9 км/ч, догоняет тележку массой m_2 =190кг, движущуюся со скоростью v_2 = 3,6 км/ч, и вскакивает на нее. С какой скоростью станет двигаться тележка с человеком? С какой скоростью будет двигаться тележка с человеком, если человек до прыжка бежал навстречу тележке?
115. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает камень массой m_1 = 2,5 кг под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью v = 10 м/с. Какова будет начальная скорость v_0 движения конькобежца, если масса его m_2 = 60 кг? Перемещением конькобежца во время броска пренебречь.
116. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами На одном конце доски стоит человек. Масса его m_1 = 60 кг, масса доски m_2 = 20 кг. С какой скоростью (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль нее со скоростью (относительно доски) v = 1 м/с? Массой колес и трением пренебречь.
117. Снаряд, летевший со скоростью v = 400 м/с, в верхней точке траектории разорвался на два осколка. Меньший осколок, масса которого составляет 40% от массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью u_1 = 150 м/с. Определить скорость u_2 большего осколка.
118. Две одинаковые лодки массами m = 200 кг каждая (вместе с человеком и грузами, находящимися в лодках) движутся парал-

лельными курсами навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v = 1 м/с. Когда лодки поравнялись, то с первой лодки на вторую и со второй на первую одновременно перебрасывают грузы массами m_1 = 200 кг Определить скорости u_1 и u_2 лодок после перебрасывания грузов.

119. На сколько переместится относительно берега лодка длиной ℓ = 3,5 м и массой m_1 = 200 кг, если стоящий на корме человек массой m_2 = 80 кг переместится на нос лодки? Считать лодку расположенной перпендикулярно берегу.
120. Лодка длиной ℓ = 3 м и массой m = 120 кг стоит на спокойной воде. На носу и корме находятся два рыбака массами m_1 = 60 кг и m_2 = 90 кг. На сколько сдвинется лодка относительно воды, если рыбаки поменяются местами.
121. В деревянный шар массой m_1 = 8 кг, подвешенный на нити длиной ℓ = 1,8 м, попадает горизонтально летящая пуля массой m_2 = 4 г. С какой скоростью летела пуля, если нить с шаром и застрявшей в нем пулей отклонилась от вертикали на угол α = 3°? Размером шара пренебречь. Удар пули считать прямым, центральным.
122. По небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне массой m_1 = 300 кг, ударяет молот массой m_2 = 8 кг. Определить КПД η удара, если удар неупругий. Полезной считать энергию, затраченную на деформацию куска железа.
123. Шар массой m_1 = 1 кг движется со скоростью v_1 = 4 м/с и сталкивается с шаром массой m_2 = 2 кг, движущимся навстречу ему со скоростью v_2 = 3 м/с Каковы скорости u_1 и u_2 шаров после удара? Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.
124. Шар массой m_1 = 3 кг движется со скоростью v_1 = 2 м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой m_2 = 5 кг. Какая работа будет совершена при деформации шаров? Удар считать абсолютно неупругим, прямым, центральным.
125. Определить КПД η неупругого удара бойка массой m_1 = 0,5 т, падающего на сваю массой m_2 = 120 кг. Полезной считать энергию, затраченную на вбивание сваи.

126. Шар массой m_1 = 4 кг движется со скоростью v_1 = 5 м/с и сталкивается с шаром массой m_2 = 6 кг, который движется ему навстречу со скоростью v_2 = 2 м/с Определить скорости u_1 и u_2 шаров после удара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

127. Из ствола автоматического пистолета вылетела пуля массой m_1 = 10 г со скоростью v = 300 м/с. Затвор пистолета массой m_2 -= 200 г прижимается к стволу пружиной, жесткость которой k=25 кН/м. На какое расстояние отойдет затвор после выстрела? Считать, что пистолет жестко закреплен.

128. Шар массой m_1 = 5 кг движется со скоростью v_1 = 1 м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой m_2 = 2 кг. Определить скорости u_1 и u_2 шаров после удара Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

129. Из орудия, не имеющего противооткатного устройства, производилась стрельба в горизонтальном направлении Когда орудие- было неподвижно закреплено, снаряд вылетел со скоростью v_1 = 600 м/с, а когда орудию дали возможность свободно откатываться назад, снаряд вылетел со скоростью v_2 = 580 м/с. С какой скоростью откатилось при этом орудие?

130. Шар массой m_1 = 2 кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы и при этом теряет 40% кинетической энергии. Определить массу m_2 большего шара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

131. Определить работу растяжения двух соединенных последовательно пружин жестокостями k_1 = 400 Н/м и k_2 = 250 Н/м, если первая пружина при этом растянулась на $\Delta\ell$ = 2 см.

132. Из шахты глубиной h = 600 м поднимают клеть массой m_1 = 3,0 т на канате, каждый метр которого имеет массу m = 1,5 кг. Какая работа А совершается при поднятии клети на поверхность Земли? Каков коэффициент полезного действия η подъемного устройства?

133. Пружина жесткостью k = 500 Н/м сжата силой F = 100 H. Определить работу А внешней силы, дополнительно сжимающей пружину еще на $\Delta\ell$ = 2 см.

134. Две пружины жесткостью k_1 = 0,5 кН/м и k_2 = 1 кН/м скреплены параллельно Определить потенциальную энергию П данной системы при абсолютной деформации $\Delta\ell$ = 4 см.

135. Какую нужно совершить работу A, чтобы пружину жесткостью k = 800 Н/м, сжатую на x = 6 см, дополнительно сжать на Δx = 8 см?

136. Если на верхний конец вертикально расположенной спиральной пружины положить груз, то пружина сожмется на $\Delta\ell$ = 3 мм. На сколько сожмет пружину тот же груз, упавший на конец пружины с высоты h = 8 см?

137. Из пружинного пистолета с пружиной жесткостью k = 150 Н/м был произведен выстрел пулей массой m = 8 г. Определить скорость v пули при вылете ее из пистолета, если пружина была сжата на Δx = 4 см.

138. Налетев на пружинный буфер, вагон массой m= 16 т, двигавшийся со скоростью v = 0,6 м/с, остановился, сжав пружину на $\Delta\ell$ = 8 см. Найти общую жесткость k пружин буфера.

139. Цепь длиной ℓ= 2 м лежит на столе, одним концом свисая со стола. Если длина свешивающейся части превышает 1/3 ℓ, то цепь соскальзывает со стола. Определить скорость и цепи в момент ее отрыва от стола.

140. Какая работа A должна быть совершена при поднятии с земли материалов для постройки цилиндрической дымоходной трубы высотой h = 40 м, наружным диаметром D = 3,0 м и внутренним диаметром d = 2,0 м? Плотность материала ρ принять равной $2{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

141. Шарик массой m = 60 г, привязанный к концу нити длиной ℓ = l,2 м, вращается с частотой n_l =2 c^{-1}, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси до расстояния ℓ_2 = 0,6 м. С какой частотой ω будет при этом вращаться шарик? Какую работу A совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

142. По касательной к шкиву маховика в виде диска диаметром D =75 см и массой т = 40 кг приложена сила F = 1 кН. Определить угловое ускорение ε и частоту вращения n маховика через вре-

мя t = 10 с после начала действия силы, если радиус r шкива равен 12 см. Силой трения пренебречь.

143. На обод маховика диаметром D = 60 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 2 кг. Определить момент инерции J маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время t = 3 с приобрел угловую скорость ω = 9 рад/с.

144. Нить с привязанными к ее концам грузами массами m_1 = 50 г и m_2 = 60 г перекинута через блок диаметром D = 4 см. Определить момент инерции J блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение ε = 1,5 рад/с^2. Трением и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

145. Стержень вращается вокруг оси, проходящей через его середину, согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где A = 2 рад/с, B = 0,2 рад/с^3. Определить вращающий момент M, действующий на стержень через время t = 2 с после начала вращения, если момент инерции стержня J = 0,048 кг м^2.

146. По горизонтальной плоскости катится диск со скоростью v = 8 м/с Определить коэффициент сопротивления, если диск, будучи предоставленным самому себе, остановился, пройдя путь s = 18 м.

147. Определить момент силы M, который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой n = 12 с$^{-1}$, чтобы он остановился в течение времени Δt = 8 с. Диаметр блока D = 30 см. Массу блока m = 6 кг считать равномерно распределенной по ободу.

148. Блок, имеющий форму диска массой m = 0,4 кг, вращается под действием силы натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массами m_1 = 0,3 кг и m_2 = 0,7 кг. Определить силы натяжения T_1 и T_2 нити по обе стороны блока.

149. К краю стола прикреплен блок. Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы. Один груз движется по поверхности стола, а другой — вдоль вертикали вниз. Определить коэффициент f трения между поверхностями груза и стола, если массы каждого груза и масса

блока одинаковы и грузы движутся с ускорением a = 5,6 м/с^2. Проскальзыванием нити по блоку и силой трения, действующей на блок, пренебречь.

150. К концам легкой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массами m_1 = 0,2 кг и m_2 = 0,3 кг. Во сколько раз отличаются силы, действующие на нить по обе стороны от блока, если масса блока m = 0,4 кг, а его ось движется вертикально вверх с ускорением a = 2 м/с^2? Силами трения и проскальзывания нити по блоку пренебречь.

151. На скамье Жуковского сидит человек и держит на вытянутых руках гири массой m = 5 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси скамьи ℓ = 70 см. Скамья вращается с частотой n_1 = 1 с$^{-1}$. Как изменится частота вращения скамьи и какую работу A произведет человек, если он сожмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до ℓ_2 = 20 см? Момент инерции человека и скамьи (вместе) относительно оси J = 2,5 кг- м^2.

152. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень вертикально по оси скамьи. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью ω_1 = 4 рад/с. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться скамья с человеком, если повернуть стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи J =5 кг-м^2. Длина стержня ℓ = 1,8 м, масса те=6 кг. Считать, что центр масс стержня с человеком находится на оси платформы.

153. Платформа в виде диска диаметром D = 3 м и массой m_1 = 180 кг может вращаться вокруг вертикальной оси. С какой угловой скоростью ω будет вращаться эта платформа, если по ее краю пойдет человек массой m_2 = 70 кг со скоростью v = 1,8 м/с относительно платформы?

154. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную (на платформе) точку? Масса платформы m_1 =- 280 кг, масса человека m_2 = 80 кг.

155. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руке за ось

велосипедное колесо, вращающееся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_1 =25 рад/с. Ось колеса расположена вертикально и совпадает с осью скамьи Жуковского. С какой скоростью ω_2 станет вращаться скамья, если повернуть колесо вокруг горизонтальной оси на угол α = 90°? Момент инерции человека и скамьи J равен 2,5 кг-м^2, момент инерции колеса J_0 = 0,5 кг-м^2.

156. Однородный стержень длиной ℓ = 1,0 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец абсолютно неупруго ударяет пуля массой m = 7 г, летящая перпендикулярно стержню и его оси. Определить массу M стержня, если в результате попадания пули он отклонится на угол α = 60°. Принять скорость пули v = 360 м/с.

157. На краю платформы в виде диска, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой n_1 = 8 мин $^{-1}$, стоит человек массой m_1 =70 кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой n_2 =10 мин $^{-1}$. Определить массу m_2 платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

158. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром D = 0,8 м и массой m_1 = 6 кг стоит человек массой m_2 = 60 кг. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него мяч массой m = 0,5 кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии r = 0,4 м от оси скамьи. Скорость мяча v = 5 м/с.

159. Горизонтальная платформа массой m_1 = 150 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой n = 8 мин '. Человек массой m_2 = 70 кг стоит при этом на краю платформы. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым, однородным диском, а человека материальной точкой.

160. Однородный стержень длиной ℓ = 1,0 м и массой M = 0,7 кг подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. В точку, отстоящую от оси на $2/3\cdot\ell$, абсолютно

упруго ударяет пуля массой m = 5 кг, летящая перпендикулярно стержню и его оси. После удара стержень отклонился на угол α = 60°. Определить скорость пули.

161. Определить напряженность G гравитационного поля на высоте h = 1000 км над поверхностью Земли. Считать известными ускорение g свободного падения у поверхности Земли и ее радиус R.
162. Какая работа A будет совершена силами гравитационного поля при падении на Землю тела массой m = 2 кг: 1) с высоты h = 1000 км; 2) из бесконечности?
163. Из бесконечности на поверхность Земли падает метеорит массой m = 30 кг. Определить работу A, которая при этом будет совершена силами гравитационного поля Земли. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R считать известными.
164. С поверхности Земли вертикально вверх пущена ракета со скоростью v = 5 км/с. На какую высоту она поднимется?
165. По круговой орбите вокруг Земли обращается спутник с периодом T = 90 мин. Определить высоту спутника. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R считать известными.
166 На каком расстоянии от центра Земли находится точка, в которой напряженность суммарного гравитационного поля Земли и Луны равна нулю? Принять, что масса Земли в 81 раз больше массы Луны и что расстояние от центра Земли до центра Луны равно 60 радиусам Земли.
167. Спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте h = 520 км. Определить период обращения спутника. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R считать известными.
168. Определить линейную и угловую скорости спутника Земли, обращающегося по круговой орбите на высоте h = 1000 км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R считать известными.
169. Какова масса Земли, если известно, что Луна в течение года

совершает 13 обращении вокруг Земли и расстояние от Земли до Луны равно $3{,}84 \cdot 10^8$ м?

170. Во сколько раз средняя плотность земного вещества отличается от средней плотности лунного? Принять, что радиус $R_З$ Земли в 390 раз больше радиуса $R_л$ Луны и вес тела на Луне в 6 раз меньше веса тела на Земле.

171. На стержне длиной ℓ = 30 см укреплены два одинаковых грузика: один — в середине стержня, другой — на одном из его концов. Стержень с грузами колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить приведенную длину L и период T простых гармонических колебаний данного физического маятника. Массой стержня пренебречь.

172. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, уравнения которых $x = A_1 \cdot sin\omega_1 t$ и $y = A_2\ cos\omega_2 t\cdot$, где A_1 = 8 см, A_2 = 4 см, $\omega_1 = \omega_2$ = 2 $с^{-1}$. Написать уравнение траектории и построить ее. Показать направление движения точки.

173. Точка совершает простые гармонические колебания, уравнение которых $x = A\ sin\omega t$, где A = 5 см, ω = 2$с^{-1}$. В момент времени, когда точка обладала потенциальной энергией П = 0,1 мДж, на нее действовала возвращающая сила F = 5 мН. Найти этот момент времени t.

174. Определить частоту ν простых гармонических колебаний диска радиусом R = 20 см около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.

175. Определить период T простых гармонических колебаний диска радиусом R = 40 см около горизонтальной оси, проходящей через образующую диска.

176. Определить период Т колебаний математического маятника, если его модуль максимального перемещения Δr = 18 см и максимальная скорость v_{max} = 16 см/с.

177. Материальная точка совершает простые гармонические колебания так, что в начальный момент времени смещение x_0 = 4

см, а скорость v_0 = 10 см/с. Определить амплитуду A н начальную фазу φ_0 колебаний, если их период T = 2 с.

178. Складываются два колебания одинакового направления и одинакового периода: $x_1 = A_1 \cdot \sin\omega_1 t$ и $x_2 = A_2 \sin(\omega\cdot(t + \tau))$, где $A_1 = A_2$ = 3 см, $\omega_1 = \omega_2 = \pi$ $с^{-1}$, τ = 0,5с. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Написать его уравнение. Построить векторную диаграмму для момента времени t = 0.

179. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой M = 200 г, прикрепленный к горизонтально расположенной легкой пружине с жесткостью k = 500 Н/м. В шар попадает пуля массой m = 10 г, летящая со скоростью v = 300 м/с, и застревает в нем. Пренебрегая перемещением шара во время удара и сопротивлением воздуха, определить амплитуду A и период T колебаний шара.

180. Шарик массой m = 60 г колеблется с периодом T = 2 с. В начальный момент времени смещение шарика x_0 = 4,0 см и он обладает энергией E = 0,02 Дж. Записать уравнение простого гармонического колебания шарика и закон изменения возвращающей силы с течением времени.

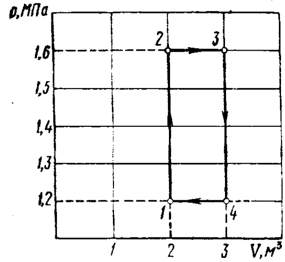
2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить массу m атома азота. [$2{,}33\cdot10^{-26}$ кг].
2. Плотность газа ρ при давлении p = 96 кПа и температуре t = 0°C равна 1,35 г/л. Найти молярную массу M газа. [$32\cdot10^{-3}$ кг/моль].
3. Определить давления p_1 и p_2 газа, содержащего $N = 10^9$ молекул и имеющего объем $V = l$ $см^3$, при температурах T_1 = 3 K и T_2 = 1000К. [41,4 нПа; 13,8 мкПа].
4. При температуре $t = 35^0$ C и давлении p = 108кПа плотность некоторого газа ρ = 12,2 кг/$м^3$. Определить относительную молекулярную массу M_r газа. [44,1].
5. Какой объем V занимает смесь азота массой m_1 = 1 кг и гелия массой m_2 = 1 кг при нормальных условиях? [6,4 $м^3$].

6. В баллоне вместимостью V = 15 л находится смесь, содержащая m_1 = 10 г водорода, m_2 = 54 г водяного пара и m_3 = 60 г оксида углерода. Температура смеси t = 27°. Определить давление. [1,69 МПа].
7. Найти полную кинетическую энергию, а также кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы аммиака NH_3 при температуре t = 27°С. [$1{,}24\cdot10^{-20}$ Дж; $6{,}2\cdot10^{-21}$ Дж].
8. Определить удельные теплоемкости c_v и c_p газообразного оксида углерода СО. [743 Дж/(кг.К); 1,04 кДж/(кг.К)].
9. Смесь газа состоит из кислорода O_2 с массовой долей w_1 = 85% и озона O_3 с массовой долей w_2 = 15%. Определить удельные теплоемкости c_v и c_p этой газовой смеси. [629 Дж/(кг.К); 877 Дж/(кг.К)].
10. Газовая смесь состоит из азота массой m_1 = 3кг и водяного пара массой m_2 = 1 кг. Принимая эти газы за идеальные, определить удельные теплоемкости c_v и c_p газовой смеси. [902 Дж/(кг. К); 1,24 кДж/(кг-К)].
11. Молекула газа состоит из двух атомов; разность удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме равна 260 Дж/(кг-К). Найти молярную массу газа и его удельные теплоемкости c_v и c_p. [$32\cdot10^{-3}$ кг/моль; 650 Дж/(кг.К); 910 Дж/(кг.К)].
12. Найти среднюю длину $<\ell>$ свободного пробега молекулы водорода при p = 133 мПа и t = - 173°С. [4,4 см].

13. Один киломоль двухатомного идеального газа совершает замкнутый цикл, график которого изображен на рис. Определить: 1) теплоту Q_1, полученную от нагревателя; 2) теплоту Q_2, переданную холодильнику; 3) работу A, совершаемую газом за один цикл; 4) термический КПД η цикла. [7,61 МДж; 7,19 МДж; 0,4 МДж; 5,3%].



14. Водород занимает объем V= 10 м^3 при давлении p_1 = 0,1МПа.

Его нагрели при постоянном объеме до давления p_2 = 0,3 МПа. Определить изменение ΔU внутренней энергии газа, работу A, совершенную им, и теплоту Q, сообщенную газу. [5 МДж; 0; 5 МДж].

15. Кислород при неизменном давлении p = 80 кПа нагревается. Его объем увеличивается от V_1 = 1 м^3 до V_2 = 3 м^3. Определить изменение ΔU внутренней энергии кислорода, работу A, совершенную им при расширении, а также теплоту Q, сообщенную газу. [400 кДж; 160 кДж; 560 кДж|.
16. В цилиндре под поршнем находится азот, имеющий массу m = 0,6 кг и занимающий объем V_1 = 1,2 м^3, при температуре T_1 =560K. В результате нагревания газ расширился и занял объем V_2 = 4,2м^3, причем температура осталась неизменной. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту Q, сообщенную газу. [0; 126 кД ж; 126 кДж].
17. В бензиновом автомобильном двигателе степень сжатия горючей смеси равна 6,2. Смесь засасывается в цилиндр при температуре t_1 =15°*С*. Найти температуру t_2 горючей смеси в конце такта сжатия. Горючую смесь рассматривать как двухатомный идеальный газ; процесс считать адиабатным. [324°С].
18. Газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя в три раза выше температуры холодильника. Нагреватель передал газу Q_1 = 41,9 кДж теплоты. Какую работу совершил газ? [28,1 кДж].
19. Какую энергию надо затратить, чтобы выдуть мыльный пузырь диаметром d = 12 *см*? Каково будет добавочное давление внутри этого пузыря? [3,62 мДж; 2,66 Па].
20. На нижнем конце трубки диаметром d = 0,2 см повисла шарообразная капля воды. Найти диаметр этой капли. [4,42 мм].
21. В сосуд с ртутью частично погружены две вертикально расположенные и параллельные друг другу стеклянные пластинки. Расстояние между пластинками d = 1 мм. Определить разность Δh уровней ртути в сосуде и между пластинками, краевой угол принять равным 138°. [—5,57 мм].

Контрольная работа 2

Таблица вариантов для контрольных работ

Вариант	Номера контрольных работ							
0	210	220	230	240	250	260	270	280
1	201	211	221	231	241	251	261	271
2	202	212	222	232	242	252	262	272
3	203	213	223	233	243	253	263	273
4	204	214	224	234	244	254	264	274
5	205	215	225	235	245	255	265	275
6	206	216	226	236	246	256	266	276
7	207	217	227	237	247	257	267	277
8	208	218	228	238	248	258	268	278
9	209	219	229	239	249	259	269	279

201. Определить количество вещества ν и число N молекул кислорода массой $m = 0{,}5$ кг.
202. Сколько атомов содержится в ртути: 1) количеством вещества $\nu = 0{,}2$ моль; 2) массой $m = 1$ г.
203. Вода при температуре $t = 4°C$ занимает объем $V == 1$ см^3. Определить количество вещества ν и число N молекул воды.
204. Найти молярную массу M и массу m_M одной молекулы поваренной соли.
205. Определить массу m одной молекулы углекислого газа.
206. Определить концентрацию n молекул кислорода, находящегося в сосуде вместимостью $V = 2$ л. Количество вещества ν кислорода равно 0,2 моль.
207. Определить количество вещества ν водорода, заполняющего сосуд объемом $V = 3$ л, если концетрация молекул газа в сосуде $n = 2 \cdot 10^{18}$ м$^{-3}$.
208. В баллоне вместимостью $V = 3$ л содержится кислород массой $m = 10$ г. Определить концентрацию n молекул газа.
209. Определить относительную молекулярную массу M_r: 1) воды; 2) углекислого газа; 3) поваренной соли.
210. Определить количество вещества ν и число N молекул азота массой $m = 0{,}2$ кг.
211. В цилиндр длиной $\ell = 1{,}6$ м, заполненный воздухом при нор-

мальном атмосферном давлении p_0, начали медленно вдвигать поршень площадью основания S = 200 см^2. Определить силу F, действующую на поршень, если его остановить на расстоянии ℓ_1 = 10 см от дна цилиндра.

212. В баллоне находится газ при температуре T_1 = 400 К. До какой температуры T_2 надо нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в 1,5 раза?
213. Баллон вместимостью V = 20 л заполнен азотом при температуре T = 400 К- Когда часть газа израсходовали, давление в баллоне понизилось на Δp = 200 кПа. Определить массу m израсходованного газа. Процесс считать изотермическим.
214. В баллоне вместимостью V = 15 л находится аргон под давлением p_1 = 600 кПа и при температуре T_1 = 300 К. Когда из баллона было взято некоторое количество газа, давление в баллоне понизилось до p_2 = 400 кПа, а температура установилась T_2 = 260К. Определить массу m аргона, взятого из баллона.
215. Два сосуда одинакового объема содержат кислород. В одном сосуде давление p_1 = 2 МПа и температура T_1 = 800К, в другом p_2 = 2,5 МПа, T_2 = 200 К. Сосуды соединили трубкой и охладили находящийся в них кислород до температуры T = 200 К. Определить установившееся в сосудах давление p.
216. Вычислить плотность ρ азота, находящегося в баллоне под давлением p = 2 МПа и имеющего температуру T = 400 К.
217. Определить относительную молекулярную массу M_r газа, если при температуре T = 154 К и давлении p = 2,8 МПа он имеет плотность ρ = 6,1 кг/м.
218. Найти плотность ρ азота при температуре T = 400 К и давлении p = 2 МПа.
219. В сосуде вместимостью V = 40 л находится кислород при температуре T =300 К. Когда часть газа израсходовали, давление в баллоне понизилось на Δp = 100 кПа. Определить массу m израсходованного кислорода. Процесс считать изотермическим.
220. Определить плотность ρ водяного пара, находящегося под давлением p = 2,5 кПа и имеющего температуру T = 250 К.

221. Определить внутреннюю энергию U водорода, а также среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon\rangle$ молекулы этого газа при температуре T = 300 К, если количество вещества ν этого газа равно 0,5 моль.
222. Определить суммарную кинетическую энергию $E_к$ поступательного движения всех молекул газа, находящегося в сосуде вместимостью V = 3 л под давлением p = 540 кПа.
223. Количество вещества гелия ν = 1,5 моль, температура T = 120 К. Определить суммарную кинетическую энергию $E_к$ поступательного движения всех молекул этого газа.
224. Молярная внутренняя энергия U_m, некоторого двухатомного газа равна 6,02 кДж/моль. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$ вращательного движения одной молекулы этого газа. Газ считать идеальным.
225. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon\rangle$ одной молекулы водяного пара при температуре T = 500 К.
226. Определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв}\rangle$ молекулы газа, заключенного в сосуд вместимостью V = 2 л под давлением p = 200 кПа. Масса газа m =0,3 г.
227. Водород находится при температуре T = 300 К. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$ вращательного движения одной молекулы, а также суммарную кинетическую энергию $E_к$ всех молекул этого газа; количество водорода ν = 0,5 моль.
228. При какой температуре средняя кинетическая энергия $\langle\varepsilon_п\rangle$ поступательного движения молекулы газа равна $4{,}14\cdot10^{-21}$ Дж?
229. В азоте взвешены мельчайшие пылинки, которые движутся так, как если бы они были очень крупными молекулами. Масса каждой пылинки равна $б\cdot10^{-10}$ г. Газ находится при температуре T = 400 К. Определить средние квадратичные скорости $\langle v_{кв}\rangle$, а также средние кинетические энергии $\langle\varepsilon_п\rangle$ поступательного движения молекулы азота и пылинки.
230. Определить среднюю кинетическую энергию <е„> поступательного движения и <евр) вращательного движения молекулы азота при температуре Г= 1 кВ. Определить также полную кинетическую энергию Ек молекулы при тех же условиях.

231. Определить молярную массу M двухатомного газа и его удельные теплоемкости, если известно, что разность c_p - c_v удельных теплоемкостей этого газа равна 260 Дж/(кг.К).
232. Найти удельные c_p и c_v, а также молярные C_p и C_v теплоемкости углекислого газа.
233. Определить показатель адиабаты у идеального газа, который при температуре T = 350 К и давлении p = 0,4 МПа занимает объем V = 300 л и имеет теплоемкость C_v = 857 Дж/К.
234. В сосуде вместимостью V=6 л находится при нормальных условиях двухатомный газ. Определить теплоемкость C_v этого газа при постоянном объеме.
235. Определить относительную молекулярную массу M_r и молярную массу M газа, если разность его удельных теплоемкостей c_p - c_v = 2,08 кДж/(кг·К).
236. Определить молярные теплоемкости газа, если его удельные теплоемкости c_v = 10,4 кДж/(кг-К) и c_p = 14.6 кДж/(кг.К).
237. Найти удельные c_v и c_p и молярные C_v и C_p теплоемкости азота и гелия.
238. Вычислить удельные теплоемкости газа, зная, что его молярная масса $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и отношение теплоемкостей C_p/C_v = 1,67.
239. Трехатомный газ под давлением p = 240 кПа и температуре t = 20°С занимает объем V = 10л. Определить теплоемкость C_p этого газа при постоянном давлении.
240. Одноатомный газ при нормальных условиях занимает объем V = 5 л. Вычислить теплоемкость C_v этого газа при постоянном объеме.
241. Найти среднее число $\langle z \rangle$ столкновений за время t = 1 с и длину свободного пробега $\langle \ell \rangle$ молекулы гелия, если газ находится под давлением p = 2 кПа при температуре T = 200 К.
242. Определить среднюю длину свободного -пробега $\langle \ell \rangle$ молекулы азота в сосуде вместимостью V = 5 л. Масса газа m = 0,5 г.
243. Водород находится под давлением p = 20 мкПа и имеет температуру T = 300 К. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle \ell \rangle$ молекулы такого газа.

244. При нормальных условиях длина свободного пробега $\langle \ell \rangle$ молекулы водорода равна 0,160 мкм. Определить диаметр d молекулы водорода.

245. Какова средняя арифметическая скорость $\langle v \rangle$ молекул кислорода при нормальных условиях, если известно, что средняя длина свободного пробега $\langle \ell \rangle$ молекулы кислорода при этих условиях равна 100 нм?

246. Кислород находится под давлением p = 133 нПа при температуре T = 200К. Вычислить среднее число $\langle z \rangle$ столкновений молекулы кислорода при этих условиях за время t = 1 с.

247. При каком давлении p средняя длина свободного пробега $\langle \ell \rangle$ молекул азота равна 1 м, если температура газа t = 10°С?

248. В сосуде вместимостью V = 5 л находится водород массой m = 0,5 г. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle \ell \rangle$ молекулы водорода в этом сосуде.

249. Средняя длина свободного пробега $\langle \ell \rangle$ молекулы водорода при некоторых условиях равна 2 мм. Найти плотность ρ водорода при этих условиях.

250. В сферической колбе вместимостью V = 3 л, содержащей азот, создан вакуум с давлением p = 80 мкПа. Температура газа T = 250 К. Можно ли считать вакуум в колбе высоким? *Примечание. Вакуум считается высоким, если длина свободного пробега молекул в нем много больше линейных размеров сосуда.*

251. Определить количество теплоты Q, которое надо сообщить кислороду объемом V = 50 л при его изохорном нагревании, чтобы давление газа повысилось на Δp = 0,5 МПа.

252. При изотермическом расширении азота при температуре T = 280К объем его увеличился в два раза. Определить: 1) совершенную при расширении газа работу A; 2) изменение ΔU внутренней энергии; 3) количество теплоты Q, полученное газом. Масса азота m = 0,2 кг.

253. При адиабатном сжатии давление воздуха было увеличено от p_1 = 50 кПа до p_2 = 0,5МПа. Затем при неизменном объеме температура воздуха была понижена до первоначальной. Определить давление p_3 газа в конце процесса.

254. Кислород массой m = 200 г занимает объем V_1 = 100 л и находится под давлением p_1 = 200кПа. При нагревании газ расширился при постоянном давлении до объема V_2 = 300 л, а затем его давление возросло до p_3 = 500 кПа при неизменном объеме. Найти изменение внутренней энергии ΔU газа, совершенную газом работу A и теплоту Q, переданную газу. Построить график процесса.

255. Объем водорода при изотермическом расширении при температуре T = 300 К увеличился в n = 3 раза. Определить работу A, совершенную газом, и теплоту Q, полученную при этом. Масса m водорода равна 200 г.

256. Азот массой m = 0,1 кг был изобарно нагрет от температуры T_1 = 200 К до температуры T_2 = 400 К. Определить работу A, совершенную газом, полученную им теплоту Q и изменение ΔU внутренней энергии азота.

257. Во сколько раз увеличится объем водорода, содержащий количество вещества ν= 0,4 моль при изотермическом расширении, если при этом газ получит количество теплоты Q = 800 Дж? Температура водорода T = 300 К.

258. Какая работа A совершается при изотермическом расширении водорода массой m = 5 г, взятого при температуре T = 290 К, если объем газа увеличивается в три раза?

259. Какая доля w_1 количества теплоты Q, подводимого к идеальному двухатомному газу при изобарном процессе, расходуется на увеличение ΔU внутренней энергии газа и какая доля на — на работу А расширения? Рассмотреть три случая, если газ: 1) одноатомный; 2) двухатомный; 3) трехатомный.

260. Определить работу А, которую совершит азот, если ему при постоянном давлении сообщить количество теплоты Q=21 кДж. Найти также изменение ΔU внутренней энергии газа.

261. Идеальный газ совершает цикл Карно при температурах холодильника T_2 = 290 К и нагревателя T_1 = 400 К. Во сколько раз увеличится коэффициент полезного действия η цикла, если температура нагревателя возрастет до T'_1 = 600 К?

262. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 нагре-

вателя в четыре раза (n =4) больше температуры холодильника. Какую долю w количества теплоты, полученного за один цикл от нагревателя, газ отдаст холодильнику?

263. Определить работу A_2 изотермического сжатия газа, совершающего цикл Карно, КПД которого η = 0,4, если работа изотермического расширения равна A_1 = 8 Дж.
264. Газ, совершающий цикл Карно, отдал холодильнику теплоту Q = 14 кДж. Определить температуру T_1 нагревателя, если при температуре холодильника T_2 = 280 К работа цикла A = 6 кДж.
265. Газ, являясь рабочим веществом в цикле Карно, получил от нагревателя теплоту Q_1 = 4,38 кДж и совершил работу A = 2,4кДж. Определить температуру нагревателя, если температура холодильника T_2 = 273 К.
266. Газ, совершающий цикл Карно, отдал холодильнику 67% теплоты, полученной от нагревателя. Определить температуру T_2 холодильника, если температура нагревателя T_1 = 430 К.
267. Во сколько раз увеличится коэффициент полезного действия η цикла Карно при повышении температуры нагревателя от T_1 = 380 К до T'_1 = 560 К? Температура холодильника T_2 = 280 К.
268. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя T_1 = 500 К, температура холодильника T_2 = 250К. Определить термически КПД η цикла, а также работу A_1 рабочего вещества при изотермическом расширении, если при изотермическом сжатии совершена работа A_2 = 70 Дж.
269. Газ, совершающий цикл Карно, получает теплоту Q_1 = 84 кДж. Определить работу A газа, если температура T_1 нагревателя в три раза выше температуры T_2 холодильника.
270. В цикле Карно газ получил от нагревателя теплоту Q = 500 Дж и совершил работу A = 100 Дж. Температура нагревателя T_1 = 400 К. Определить температуру T_2 холодильника.
271. Найти массу m воды, вошедшей в стеклянную трубку с диаметром канала d=0,8 мм, опущенную в воду на малую глубину. Считать смачивание полным.
272. Какую работу A надо совершить при выдувании мыльного пузыря, чтобы увеличить его объем от V_1 = 8 см^3 до V_2 = 16 см^3?

Считать процесс изотермическим.

273. Какая энергия E выделится при слиянии двух капель ртути диаметром d_1 = 0,8 мм и d_2 = 1,2 мм в одну каплю?

274. Определить давление p внутри воздушного пузырька диаметром d = 4 мм, находящегося в воде у самой ее поверхности. Считать атмосферное давление нормальным.

275. Пространство между двумя стеклянными параллельными пластинками с площадью поверхности S = =100 см^2 каждая, расположенными на расстоянии ℓ = 20 мкм друг от друга, заполнено водой. Определить силу F, прижимающую пластинки друг к другу. Считать мениск вогнутым с диаметром d, равным расстоянию между пластинками.

276. Глицерин поднялся в капиллярной трубке диаметром канала d = 1 мм на высоту h = 20 мм. Определить поверхностное натяжение α глицерина. Считать смачивание полным.

277. В воду опущена на очень малую глубину стеклянная трубка с диаметром канала d = 1 мм. Определить массу m воды, вошедшей в трубку.

278. На сколько давление p воздуха внутри мыльного пузыря больше нормального атмосферного давления ро, если диаметр пузыря d = 5 мм?

279. Воздушный пузырек диаметром d = 2,2 мкм находится в воде у самой ее поверхности. Определить плотность ρ воздуха в пузырьке, если воздух над поверхностью воды находится при нормальных условиях.

280. Две капли ртути радиусом r = 1,2 мм каждая слились в одну большую каплю. Определить энергию E, которая выделится при этом слиянии. Считать процесс изотермическим.

Рекомендуемая литература:

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. –М.: Наука, 1987 г.–432 с.
2. Бланк А.Я. Физика. –Х.: Каравелла, 1996 г.–272 с.
3. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике.–

М.: Высшая школа, 1981 г.

Оглавление